

- Lösungshinweise -

Musterprüfung Nr. 006 zum Fachabitur
zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Notenschlüssel:

Note	Punkte	Bewertungseinheiten	
		von	bis
+	15	100	96
1	14	95	91
-	13	90	86
+	12	85	81
2	11	80	76
-	10	75	71
+	9	70	66
3	8	65	61
-	7	60	56
+	6	55	51
4	5	50	46
-	4	45	41
+	3	40	34
5	2	33	27
-	1	26	20
6	0	19	0

Ergibt die Gesamtsumme der Bewertungseinheiten n,5,
so wird einmalig zugunsten des Prüflings aufgerundet.

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 1 - A -

2 **1.1** $f(x) = x^2(3 - x) = 0 \Rightarrow x_{1;2} = 0$ (doppelte Nullstelle), $x_3 = 3$ (einfache Nullstelle)

4 **1.2** $f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x - 2)$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = 2$

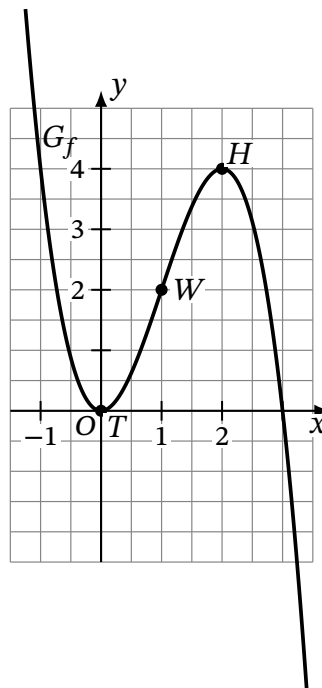
Vorzeichen von f' : – für $x < 0$, + für $0 < x < 2$, – für $x > 2$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt $T(0 | 0)$, Hochpunkt $H(2 | 4)$ ($f(2) = -8 + 12 = 4$)

2 **1.3** $f''(x) = -6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$; f'' wechselt dort das Vorzeichen (von + nach –).

$f(1) = -1 + 3 = 2$: Wendepunkt $W(1 | 2)$

3 **1.4** $f(-1) = 4$, $f(3,5) \approx -6,1$; $f(x) \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow +\infty$



3 **2.1** Für $x \rightarrow +\infty$ gilt $e^{-x} \rightarrow 0$, also $g(x) \rightarrow b$: Aus der Asymptote $y = 2$ folgt $b = 2$.

G_g schneidet die y -Achse bei 5: $g(0) = a + b = 5 \Rightarrow a = 3$. Also $a = 3$ und $b = 2$.

Bewertung: 1 BE b mit Begründung über die Asymptote, 1 BE Ansatz $g(0) = 5$, 1 BE a .

2 **2.2** $G(x) = -3e^{-x} + 2x + C$; $G(0) = -3 + C = 0 \Rightarrow C = 3$: $G(x) = -3e^{-x} + 2x + 3$

2 **3.1** Produktregel: $H'(x) = 1 \cdot e^x + (x - 1) \cdot e^x = x \cdot e^x = h(x)$

2 **3.2** $h(x) \geq 0$ für $x \geq 0$, Nullstelle bei 0: $\int_0^1 h(x) dx = H(1) - H(0) = 0 - (-1) = 1$

Der Flächeninhalt beträgt 1 (FE).

2 **3.3** Für $x < 0$ ist $x < 0$ und $e^x > 0$, also $h(x) < 0$: G_h verläuft auf $[-2; 0[$ unterhalb der x -Achse.

Das Integral über ein Intervall, auf dem der Integrand negativ ist, hat einen negativen Wert.

Bewertung: 1 BE Vorzeichen von h , 1 BE Schluss auf das Integral.

22

BE	- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 1 - S -	
2	1.1	a) Zufallsexperiment: Der Ausgang (Gutschein oder nicht) ist vorher ungewiss, der Vorgang ist wiederholbar. b) Kein Zufallsexperiment: Die Anzahl steht auf der Packung fest, das Ergebnis ist nicht ungewiss.
2	1.2	$P(\text{genau einer}) = 0,3 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot 0,3 = 0,42$ (große Packung: Ziehen annähernd unabhängig)
2	2.1	Der Reißnagel ist nicht symmetrisch gebaut (Kopf und Spitze); es gibt keinen Grund, beide Lagen für gleich wahrscheinlich zu halten – ein Laplace-Experiment liegt nicht vor. <i>Bewertung:</i> 1 BE Hinweis auf die fehlende Symmetrie, 1 BE Folgerung.
2	2.2	Relative Häufigkeit: $h(S) = \frac{310}{500} = 0,62$; Schätzwert $P(S) \approx 0,62$. Bei einer großen Anzahl von Würfeln stabilisiert sich die relative Häufigkeit (empirisches Gesetz der großen Zahlen).
2	3.1	$3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ Menüs
2	3.2	Reihenfolge ohne Wiederholung: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ Aufstellungen
12		

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A I -

3 **1.1** $a(0) = 0$: Unmittelbar bei der Veröffentlichung gibt es noch keine Aufrufe.
Für $t \rightarrow \infty$ gilt $t \cdot e^{-0,5t} \rightarrow 0$ (die Exponentialfunktion dominiert), also $a(t) \rightarrow 0$: Mit der Zeit wird der Beitrag kaum noch aufgerufen.

5 **1.2** $\dot{a}(t) = 1200 e^{-0,5t} + 1200 t \cdot (-0,5) e^{-0,5t} = 600 (2 - t) e^{-0,5t}$
 $\dot{a}(t) = 0 \iff t = 2$ (da $e^{-0,5t} > 0$); $\dot{a}$ wechselt dort das Vorzeichen von + nach -: Maximum.

$$a(2) = 2400 e^{-1} \approx 883$$

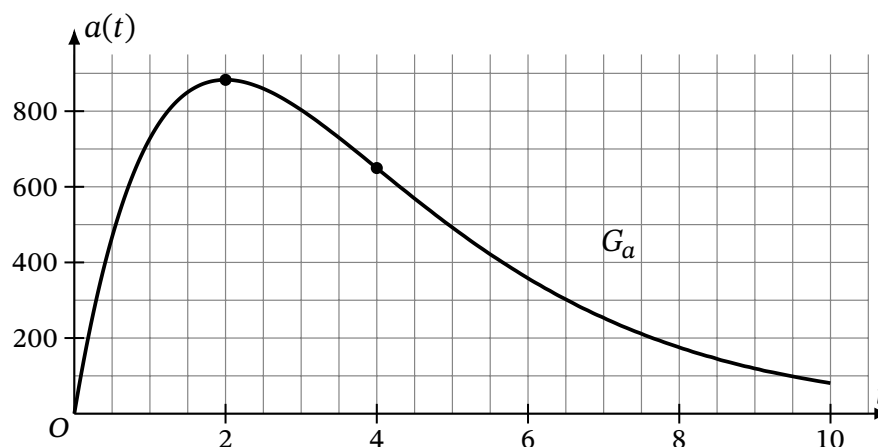
Zwei Stunden nach der Veröffentlichung wird der Beitrag am häufigsten aufgerufen, mit etwa 883 Aufrufen pro Stunde.

4 **1.3** $\ddot{a}(t) = 600 (-1) e^{-0,5t} + 600 (2 - t) (-0,5) e^{-0,5t} = 300 (t - 4) e^{-0,5t}$
 $\ddot{a}(t) = 0 \iff t = 4$; Vorzeichenwechsel von - nach +: $\dot{a}$ hat bei $t = 4$ ein Minimum ($\dot{a}(4) = -1200 e^{-2} \approx -162$).

Zum Zeitpunkt $t = 4$ nimmt die Anzahl der Aufrufe pro Stunde am stärksten ab.

4 **1.4**

t	0	1	2	3	4	6	8	10
$a(t)$	0	728	883	803	650	358	176	81



3 **1.5** $\dot{A}(t) = -2400 [1 \cdot e^{-0,5t} + (t + 2) \cdot (-0,5) e^{-0,5t}]$
 $= -2400 e^{-0,5t} (-0,5t) = 1200 t e^{-0,5t} = a(t)$
 $A(0) = 4800 - 2400 \cdot 2 \cdot 1 = 0$

3 **1.6** $\int_0^6 a(t) dt = A(6) - A(0) = 4800 - 19200 e^{-3} \approx 3844$

In den ersten sechs Stunden wird der Beitrag etwa 3844-mal aufgerufen.

3 **1.7** Die Gesamtzahl der Aufrufe bis zum Zeitpunkt t ist $A(t) = 4800 - 2400 (t + 2) e^{-0,5t}$.
Da $2400 (t + 2) e^{-0,5t} > 0$ ist, gilt $A(t) < 4800$; für $t \rightarrow \infty$ geht dieser Term gegen 0, also $A(t) \rightarrow 4800$.

Die Aussage ist falsch: Obwohl die Rate für $t > 0$ nie null wird, bleibt die Gesamtzahl unter 4800 Aufrufen, weil die Rate schnell genug abnimmt.

Bewertung: 1 BE Ansatz über A , 1 BE Grenze 4800, 1 BE Urteil mit Begründung.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE	- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A I - (Fortsetzung)	
2	2.1 $G(0) = -180$: Werden keine Gläser hergestellt, entsteht ein Verlust von 180 €; das sind die monatlichen Fixkosten.	
4	2.2 $G(3) = -270 + 1080 - 630 - 180 = 0$ Polynomdivision: $G(x) = -10(x-3)(x^2 - 9x - 6)$; $x^2 - 9x - 6 = 0 \iff x = \frac{9 \pm \sqrt{105}}{2}$ $x \approx 9,62$ (die negative Lösung liegt nicht in D_G). Vorzeichen: $G(x) > 0$ für $3 < x < 9,62$. Gewinnzone: mehr als 300 und weniger als etwa 962 Gläser im Monat.	
4	2.3 $G'(x) = -30x^2 + 240x - 210 = -30(x-1)(x-7)$; $G'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ oder $x = 7$ $G''(x) = -60x + 240$; $G''(7) = -180 < 0$: Maximum; Randwerte $G(0) = -180$, $G(10) = -280$. Bei 700 Gläsern ist der Gewinn am größten: $G(7) = 800$, also 800 €.	
3	2.4 Auf $[1; 7]$ ist $G'(x) > 0$, G steigt also auf $[3; 6]$ streng monoton. Unter der Bedingung $x \leq 6$ liegt das Maximum am Rand: $G(6) = 720$. Der Hofladen sollte 600 Gläser herstellen; der größtmögliche Gewinn beträgt dann 720 €. <i>Bewertung:</i> volle BE nur mit Begründung des Randmaximums (Monotonie oder Vergleich mit dem lokalen Maximum außerhalb).	
2	2.5 $G'(x) = -30x^2 + 240x - 210$, $G'(3) = 240$ Bei 300 Gläsern steigt der Gewinn momentan um 240 € je hundert zusätzliche Gläser.	
3	2.6 $G''(x) = -60x + 240 = 0 \iff x = 4$; $G'''(x) = -60 < 0$, also hat G' bei $x = 4$ ein Maximum. Bei 400 Gläsern nimmt der Gewinn am stärksten zu, momentan um $G'(4) = -480 + 960 - 210 = 270$ € je hundert zusätzliche Gläser.	
43		

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A II -

- 3 **1.1** $f(x) = \frac{1}{2}x(x^2 - 6x + 8) = \frac{1}{2}x(x-2)(x-4) = 0$
Nullstellen: $x = 0, x = 2, x = 4$
- 4 **1.2** Es gilt $F' = f$; Extremstellen von F liegen an Nullstellen von f mit Vorzeichenwechsel.
Bei $x = 0$ und $x = 4$ wechselt f von $-$ nach $+$: Tiefpunkte von G_F ; bei $x = 2$ von $+$ nach $-$: Hochpunkt von G_F .
Bewertung: 1 BE Zusammenhang $F' = f$, 2 BE Vorzeichenwechsel, 1 BE Art.
- 3 **1.3** Tabelle III gehört zu f : Werte 0 an den Nullstellen 0, 2, 4 und $f(1) = 1,5$ wie im Graphen.
Tabelle II gehört zu F : $F(0) = 0$ und größter Wert bei $x = 2$ (Hochpunkt aus 1.2).
Tabelle I gehört zu f' : positive Werte bei 0 und 4 (G_f steigt), negative bei 2 (G_f fällt).
- 2 **1.4** $F(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + 2x^2 + C$; $F(0) = 0 \Rightarrow C = 0$: $F(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + 2x^2$
- 4 **1.5** $F(2) = 2 - 8 + 8 = 2$, $F(4) = 32 - 64 + 32 = 0$, $F(-0,5) \approx 0,63$, $F(4,5) \approx 0,63$; G_F hat Wendepunkte an den Extremstellen von f ($x \approx 0,85$ und $x \approx 3,15$).
-
- 4 **1.6** $\int_0^4 f(x) dx = F(4) - F(0) = 0$
 $\int_0^2 f(x) dx = F(2) = 2$, $\int_2^4 f(x) dx = F(4) - F(2) = -2$
Flächeninhalt: $2 + |-2| = 4$ (FE)
- 2 **1.7** Auf $[2; 4]$ liegt G_f unterhalb der x -Achse; das Integral zählt diesen Flächeninhalt negativ.
Die beiden gleich großen Teilflächen (je 2 FE) heben sich im Integral auf; eingeschlossen werden aber 4 FE.
Bewertung: 1 BE Vorzeichen des Integrals unterhalb der Achse, 1 BE Bilanz $\neq$ Flächeninhalt.

BE	- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A II - (Fortsetzung)	
4	2.1	Differenzen: 60; 78; 101; 132 – nicht konstant, also kein lineares Wachstum.
		Quotienten: $\frac{260}{200} = 1,3$; $\frac{338}{260} = 1,3$; $\frac{439}{338} \approx 1,3$; $\frac{571}{439} \approx 1,3$ – nahezu konstant.
		Die Entwicklung wird besser durch ein exponentielles Modell beschrieben (Wachstumsfaktor 1,3 je Monat).
2	2.2	$N(t) = 200 \cdot 1,3^t$ (Anfangswert 200, Faktor 1,3)
2	2.3	$1,3 = e^{\ln(1,3)}$, also $N(t) = 200 \cdot (e^{\ln(1,3)})^t = 200 \cdot e^{\ln(1,3) \cdot t}$ mit $k = \ln(1,3) \approx 0,262$
4	2.4	$200 \cdot 1,3^t = 2000 \iff 1,3^t = 10 \iff t = \frac{\ln(10)}{\ln(1,3)} \approx 8,78$
		Nach etwa 8,78 Monaten ($8 < t < 9$), also im neunten Monat seit Schuljahresbeginn, hat der Kanal erstmals 2000 Follower.
		<i>Bewertung:</i> 1 BE Ansatz, 2 BE Lösung $t \approx 8,78$, 1 BE Angabe neunter Monat.
3	2.5	$\dot{N}(t) = 200 \cdot \ln(1,3) \cdot 1,3^t$; $\dot{N}(4) = 200 \cdot \ln(1,3) \cdot 1,3^4 \approx 150$
		Zu Beginn des fünften Monats wächst der Kanal momentan um etwa 150 Follower pro Monat.
3	2.6	Zuwachs im ersten Monat: 60; lineares Modell $L(t) = 200 + 60t$, also $L(4) = 440$.
		Die Tabelle zeigt 571 Follower, das exponentielle Modell liefert $N(4) \approx 571$: Das exponentielle Modell passt deutlich besser, das lineare unterschätzt das Wachstum.
3	2.7	$N(36) = 200 \cdot 1,3^{36} \approx 2,5$ Millionen Follower.
		So viele Follower kann ein Schülerzeitungskanal einer Schule nicht haben; das Wachstum wird sich abschwächen (begrenzte Zahl interessierter Personen).
		Das Modell ist nur für die ersten Monate geeignet.
		<i>Bewertung:</i> 1 BE Rechnung, 1 BE Vergleich mit einer realistischen Größenordnung, 1 BE Folgerung.
43		

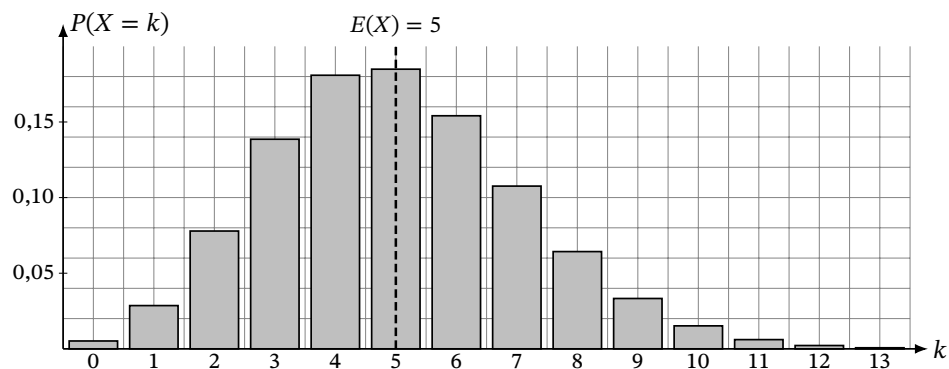
BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - S I -

- 3 **1.1** a) Ja: zwei Ausgänge (Fehlausgabe oder nicht), Trefferwahrscheinlichkeit 0,1 bei jeder Bestellung, unabhängig.
 b) Nein: Ohne Zurücklegen ändert sich die Wahrscheinlichkeit für einen beschädigten Riegel bei jeder Entnahme.
 c) Nein: Es gibt keine feste Anzahl von Stufen mit jeweils zwei Ausgängen; gezählt wird nur eine Anzahl.

- 3 **1.2** $X \sim B(50; 0,1)$
 $P(X = 5) = B(50; 0,1; 5) = 0,18492; \quad P(X \leq 3) = 0,25029$

- 4 **1.3** Summe der Säulenhöhen bei $k = 3, \dots, 7: \approx 0,14 + 0,18 + 0,18 + 0,15 + 0,11 \approx 0,77$ (exakt 0,76613)
 Erwartungswert $E(X) = n p = 50 \cdot 0,1 = 5$ (gestrichelt):



Bewertung: Ablesewerte zwischen 0,74 und 0,80 sind zu akzeptieren.

- 2 **1.4** $E(X) = 5$: Bei sehr vielen Serien von je 50 Bestellungen treten im Mittel 5 Fehlausgaben pro Serie auf.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE	- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - S I - (Fortsetzung)
4	2.1 Testgröße X: Anzahl der Fehlausgaben bei 100 Bestellungen; $X \sim B(100; p)$ $H_0 : p \leq 0,1; \quad H_1 : p > 0,1; \quad \text{Ablehnungsbereich } \bar{A} = \{k; \dots; 100\}$ $P_{0,1}(X \geq k) \leq 0,05:$ $P(X \geq 16) = 1 - P(X \leq 15) = 0,03989, \quad P(X \geq 15) = 0,07257 \Rightarrow k = 16$ Entscheidungsregel: Treten mindestens 16 Fehlausgaben auf, wird H_0 abgelehnt und die Vermutung der Schülervvertretung als gestützt angesehen; sonst nicht.
2	2.2 Fehler erster Art: Die Behauptung des Betreibers wird abgelehnt (mindestens 16 Fehlausgaben), obwohl tatsächlich höchstens 10 % der Bestellungen zu einer Fehlausgabe führen.
3	2.3 Gesucht ist $P_{0,2}(X \leq 15)$ (Fehler zweiter Art): $P(X \leq 15) = 0,12851$ Mit etwa 13 % Wahrscheinlichkeit wird die falsche Behauptung des Betreibers nicht abgelehnt.
2	2.4 14 liegt nicht im Ablehnungsbereich: H_0 wird nicht abgelehnt, die Vermutung der Schülervvertretung ist durch den Test nicht gestützt. Das beweist aber nicht, dass höchstens 10 % Fehlausgaben auftreten – der Stichprobenanteil (14 %) liegt darüber, die Abweichung kann aber zufällig sein.
23	

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - S II -

3 1.1

	C	$\bar{C}$	Σ
Z	0,24	0,36	0,60
$\bar{Z}$	0,06	0,34	0,40
Σ	0,30	0,70	1

2 1.2 $P_C(Z) = \frac{0,24}{0,30} = 0,8$ 3 1.3 Die Aussage ist falsch: Der Veranstalter verwechselt $P_C(Z)$ mit $P_Z(C)$.

$P_Z(C) = \frac{0,24}{0,60} = 0,4$: Nur 40 % der Zugreisenden übernachten auf dem Campingplatz (wie in 1.0 angegeben); 80 % sind der Anteil der Zugreisenden unter den Campern.

Bewertung: volle BE nur mit Benennung der vertauschten Bedingung und dem richtigen Wert.

2 1.4 $P_{\bar{Z}}(C) = \frac{0,06}{0,40} = 0,15$: Von den Besuchern, die nicht mit dem Zug anreisen, campen 15 %.4 2.1 $P(X = 2) = 1 - 0,1 - 0,3 = 0,6$

x	0	1	2
$P(X = x)$	0,1	0,3	0,6

$$E(X) = 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,6 = 1,5$$

4 2.2 Im Mittel werden $2 - 1,5 = 0,5$ Becher pro Besucher nicht zurückgegeben.

Verbleibendes Pfand pro Besucher: $0,5 \cdot 3 \text{ €} = 1,50 \text{ €}$

Bei 8000 Besuchern sind etwa $8000 \cdot 1,50 \text{ €} = 12000 \text{ €}$ zu erwarten (Erwartungswert, tatsächlicher Betrag schwankt).

2 3.1 Jeder Besucher reist entweder mit dem Zug an oder nicht (zwei Ausgänge); bei sehr vielen Besuchern ändert die Auswahl von 20 Personen die Wahrscheinlichkeit 0,4 praktisch nicht (annähernd unabhängig): $Y \sim B(20; 0,4)$.3 3.2 Mindestens 15 mit dem Zug $\iff$ höchstens 5 nicht mit dem Zug: $P(Y \leq 5) = 0,12560$

23