

- Lösungshinweise -

Musterprüfung Nr. 004 zum Fachabitur
zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Notenschlüssel:

Note	Punkte	Bewertungseinheiten	
		von	bis
+	15	100	96
1	14	95	91
–	13	90	86
+	12	85	81
2	11	80	76
–	10	75	71
+	9	70	66
3	8	65	61
–	7	60	56
+	6	55	51
4	5	50	46
–	4	45	41
+	3	40	34
5	2	33	27
–	1	26	20
6	0	19	0

Ergibt die Gesamtsumme der Bewertungseinheiten n,5,
so wird einmalig zugunsten des Prüflings aufgerundet.

BE	- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 1 - A -	
3	1.1	$f(x) = x(x^2 - 6x + 9) = x(x - 3)^2$ $x_1 = 0$ (einfache Nullstelle); $x_{2,3} = 3$ (doppelte Nullstelle)
4	1.2	$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ oder $x = 3$ Vorzeichen von f' : + für $x < 1$, – für $1 < x < 3$, + für $x > 3$ $\Rightarrow$ Hochpunkt $H(1 4)$, Tiefpunkt $T(3 0)$
3	1.3	Randwerte: $f(0) = 0$, $f(4) = 64 - 96 + 36 = 4$ Im Intervall liegen der Hochpunkt $(1 4)$ und der Tiefpunkt $(3 0)$; größter Wert 4, kleinster Wert 0. Wertemenge: $W = [0; 4]$
4	2.1	Steigungsdreieck zwischen den Rasterpunkten $(2,5 6)$ und $(3,5 12)$ auf t : $m = \frac{12 - 6}{3,5 - 2,5} = 6$ Bestätigung: $p'(x) = 2x$, $p'(3) = 6$ – die Tangentensteigung stimmt mit dem abgelesenen Wert überein. $t: y = 6x + b$ mit $P: 9 = 6 \cdot 3 + b \Rightarrow b = -9$, also $t: y = 6x - 9$ Bewertung: 1 BE Steigung aus der Abbildung, 1 BE Ableitung an der Stelle, 1 BE Ansatz mit P , 1 BE Gleichung.
3	2.2	Eine Steigung von 100 % bedeutet $p'(x) = 1$: $p'(x) = 2x > 1 \Rightarrow x > 0,5$. Die Absprungkante ist für $0,5 < x \leq 0,6$ steiler als 100 %. Oberes Ende: $p'(0,6) = 1,2$, also eine Steigung von 120 %. Bewertung: 1 BE Übersetzung 100 % $\Rightarrow$ Steigung 1, 1 BE Bereich $0,5 < x \leq 0,6$, 1 BE 120 %.
3	3.1	Stammfunktionen: $K(x) = e^{2x} + x + C$ (Probe: $K'(x) = 2e^{2x} + 1$) $K(0) = 1 + C = 0 \Rightarrow C = -1$: $K(x) = e^{2x} + x - 1$
2	3.2	Spiegeln an der x -Achse: $x \mapsto -e^x$; verschieben um 2 nach oben: $x \mapsto -e^x + 2$ Für $x \rightarrow -\infty$ gilt $e^x \rightarrow 0$: Asymptote $y = 2$
22		

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 1 - S -

2

1.1

Schätzwert: $P(Z) \approx \frac{620}{1000} = 0,62$
Nach dem empirischen Gesetz der großen Zahlen stabilisiert sich die relative Häufigkeit bei vielen Versuchen; bei 1000 Würfeln ist sie ein guter Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit.

2

1.2

Zwei mögliche Ergebnisse bedeuten nicht, dass sie gleich wahrscheinlich sind (kein Laplace-Experiment): Der Kronkorken ist nicht symmetrisch gebaut (Zacken, Schwerpunkt). Die Messung mit 62 % bei 1000 Würfeln widerspricht der Annahme von 50 % deutlich.

Bewertung: 1 BE fehlende Gleichwahrscheinlichkeit, 1 BE Bezug auf die Messung.

2

2.1

	A	$\bar{A}$	Σ
M	0,25	0,10	0,35
$\bar{M}$	0,35	0,30	0,65
Σ	0,60	0,40	1

2

2.2

$P_A(M) = \frac{P(A \cap M)}{P(A)} = \frac{0,25}{0,60} \approx 0,42$

2

3.1

Anzahl der Eisbecher: $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$
Wahrscheinlichkeit für die Lieblingsbelegung: $\frac{1}{1000} = 0,001$

2

3.2

Günstige Becher: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$; $P = \frac{720}{1000} = 0,72$

12

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A I -

- 4 **1.1** 14 Uhr entspricht $t = 8$. Größter Wert: $P(8) = 12,8$ und $P'(8) = 0$ (waagrechte Tangente).
 $P(8) = 512a + 64b = 12,8$; $P'(t) = 3at^2 + 2bt$, $P'(8) = 192a + 16b = 0 \Rightarrow b = -12a$
 $512a - 768a = 12,8 \Rightarrow a = -0,05$; $b = 0,6$; $P(t) = -0,05t^3 + 0,6t^2$
Bewertung: 2 BE für die begründeten Bedingungen (Maximum $\Rightarrow P'(8) = 0$).
- 4 **1.2** $P'(t) = -0,15t^2 + 1,2t$; $P''(t) = -0,3t + 1,2$
 $P''(t) = 0 \Rightarrow t = 4$; P'' wechselt dort das Vorzeichen von $+$ nach $-$: größte Zunahme der Leistung (Wendestelle; an den Rändern ist $P'(0) = 0$, $P'(12) < 0$).
 $P'(4) = -2,4 + 4,8 = 2,4$: Um 10 Uhr ($t = 4$) nimmt die Leistung am stärksten zu, um 2,4 kW pro Stunde.
- 3 **1.3** Stammfunktion: $F(t) = -0,0125t^4 + 0,2t^3$
Vor 14 Uhr: $\int_0^8 P(t) dt = F(8) - F(0) = -51,2 + 102,4 = 51,2$ (in kWh)
Nach 14 Uhr: $\int_8^{12} P(t) dt = F(12) - F(8) = 86,4 - 51,2 = 35,2$ (in kWh)
Die Aussage trifft nicht zu: Der Graph ist zur Geraden $t = 8$ nicht symmetrisch; vor 14 Uhr wird deutlich mehr Energie geliefert (8 Stunden Anstieg gegenüber 4 Stunden Abfall).
Bewertung: volle BE nur mit beiden Integralen und Begründung über die fehlende Symmetrie bzw. die Zeitdauern.

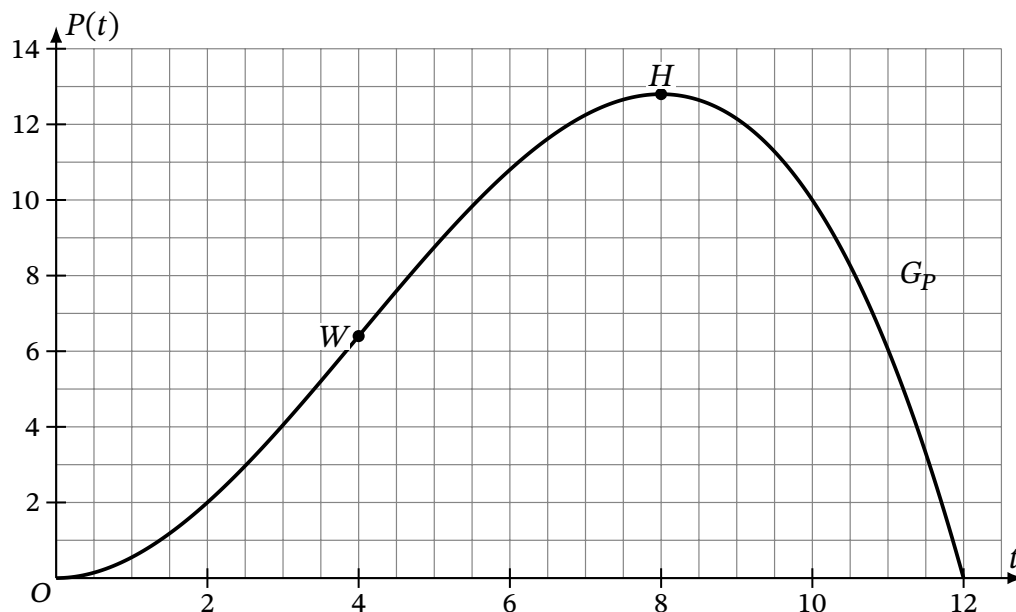
Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A I - (Fortsetzung)

4 1.4

t	0	2	4	6	8	10	12
$P(t)$	0	2	6,4	10,8	12,8	10	0



5 1.5 $\int_0^{12} P(t) dt = F(12) - F(0) = -259,2 + 345,6 = 86,4$

Die Anlage liefert an diesem Tag 86,4 kWh.

Mittlere Leistung: $\bar{P} = \frac{86,4 \text{ kWh}}{12 \text{ h}} = 7,2 \text{ kW}$

3 1.6 Nach dem Modell ist $P(12) = 0$; die App zeigt um 18 Uhr noch 0,4 kW: Das Modell unterschätzt die Leistung am Abend etwas (Abweichung klein gegenüber dem Maximum von 12,8 kW).

Für $t > 12$ liefert das Modell negative Werte (z. B. $P(13) < 0$), die physikalisch sinnlos sind. Es darf nur für $0 \leq t \leq 12$ verwendet werden; die Abendstunden mit schwacher Restleistung beschreibt es nicht.

Bewertung: 1 BE Vergleich mit dem App-Wert, 1 BE negative Werte, 1 BE Gültigkeitsbereich.

3 2.1 $N(10) = 6 \Rightarrow 2e^{10k} = 6 \Rightarrow e^{10k} = 3 \Rightarrow k = \frac{\ln(3)}{10} \approx 0,11$

3 2.2 $2e^{0,11t} > 100 \Rightarrow e^{0,11t} > 50 \Rightarrow t > \frac{\ln(50)}{0,11} \approx 35,6$

Nach etwa 35,6 Stunden ist die Hälfte des Grenzwerts (100 Millionen pro Milliliter) überschritten.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A I - (Fortsetzung)

3 **2.3** Verdorben: $2e^{0,11t} = 200 \Rightarrow t = \frac{\ln(100)}{0,11} \approx 41,9$

Von der Hälfte bis zum Grenzwert vergehen nur $41,9 - 35,6 \approx 6,3$ Stunden – genau die Verdopplungszeit $\frac{\ln(2)}{0,11} \approx 6,3$.

Die Aussage ist falsch: Die Anzahl verdoppelt sich in gleichen Zeitabständen; die letzte Verdopplung dauert so lange wie jede andere, nicht so lange wie der ganze bisherige Anstieg.

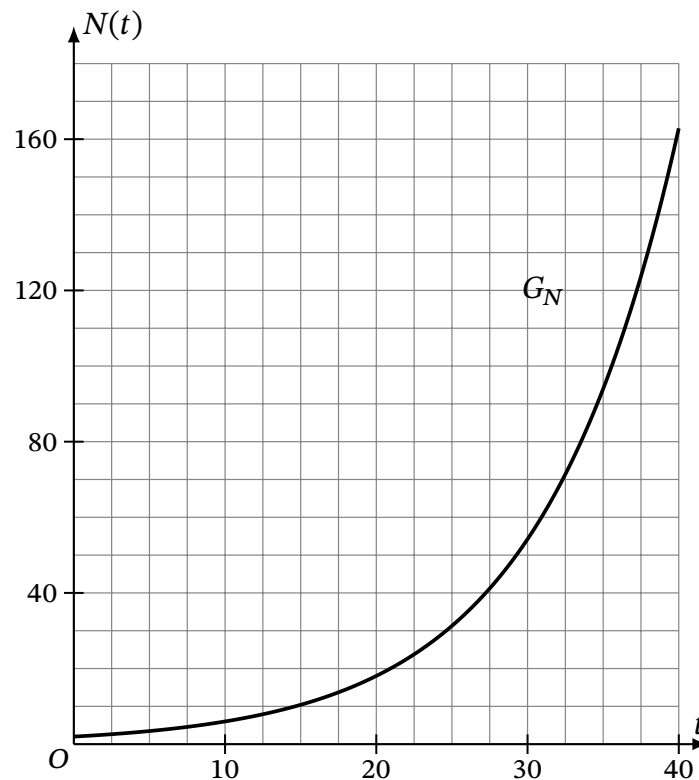
Bewertung: volle BE nur mit Begründung über die konstante Verdopplungszeit.

3 **2.4** $\dot{N}(t) = 0,22e^{0,11t}$; $\dot{N}(20) = 0,22e^{2,2} \approx 2,0$

Nach 20 Stunden nimmt die Bakterienanzahl momentan um etwa 2 Millionen pro Milliliter und Stunde zu.

4 **2.5**

t	0	10	20	30	40
$N(t)$	2	6,0	18,1	54,2	162,9



4 **2.6** Für $t \rightarrow \infty$ gilt $N(t) \rightarrow \infty$; die Anzahl ist aber durch die Nährstoffe auf höchstens 1000 Millionen pro Milliliter begrenzt. Das Modell eignet sich daher nicht für beliebig lange Zeiten.

$2e^{0,11t} = 1000 \Rightarrow t = \frac{\ln(500)}{0,11} \approx 56,5$: Spätestens ab etwa 56,5 Stunden gilt das Modell sicher nicht mehr (in Wirklichkeit flacht das Wachstum schon früher ab).

Bewertung: 2 BE Begründung über das Verhalten für $t \rightarrow \infty$, 2 BE Zeitpunkt.

43

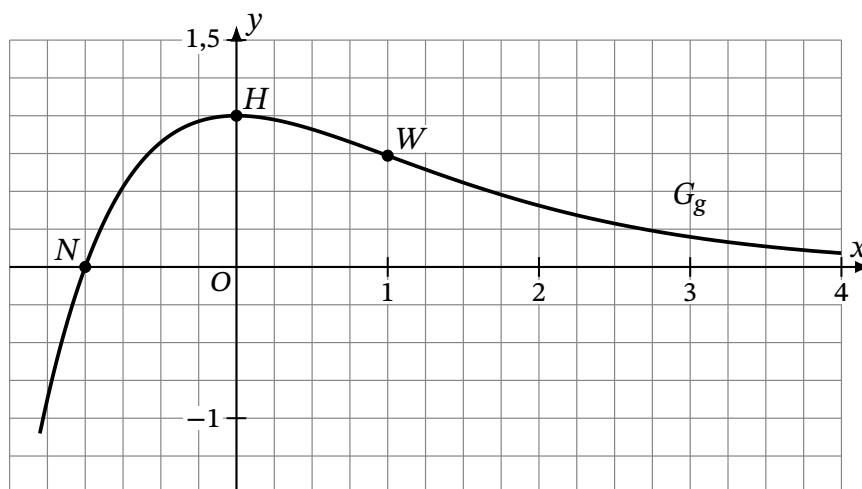
BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A II -

- 3 **1.1** $e^{-x} > 0$ für alle x : $g(x) = 0 \iff x + 1 = 0$; Nullstelle $x = -1$
 $x \rightarrow +\infty$: $e^{-x} \rightarrow 0$ „setzt sich gegen“ $x + 1$ durch: $g(x) \rightarrow 0$
 $x \rightarrow -\infty$: $x + 1 \rightarrow -\infty$ und $e^{-x} \rightarrow +\infty$: $g(x) \rightarrow -\infty$
- 5 **1.2** Produktregel: $g'(x) = 1 \cdot e^{-x} + (x + 1) \cdot (-e^{-x}) = -x e^{-x}$
 $g'(x) = 0 \iff x = 0$; Vorzeichen von g' : + für $x < 0$, – für $x > 0$
 $g(0) = 1$: Hochpunkt $H(0 | 1)$
- 4 **1.3** $g''(x) = -e^{-x} + x e^{-x} = (x - 1) e^{-x}$; $g''(x) = 0 \iff x = 1$
 $g''(x) < 0$ für $x < 1$: G_g rechtsgekrümmt; $g''(x) > 0$ für $x > 1$: G_g linksgekrümmt
 $g(1) = \frac{2}{e} \approx 0,74$: Wendepunkt $W\left(1 \mid \frac{2}{e}\right)$

4 **1.4**

x	-1,3	-1	-0,5	0	1	2	3	4
$g(x)$	-1,10	0	0,82	1	0,74	0,41	0,20	0,09



- 4 **1.5** $G'(x) = -e^{-x} + (x + 2)e^{-x} = (x + 1)e^{-x} = g(x) \checkmark$
Das Flächenstück liegt zwischen der Nullstelle -1 und der y -Achse; dort ist $g(x) \geq 0$:

$$\int_{-1}^0 g(x) dx = G(0) - G(-1) = -2 - (-e) = e - 2 \approx 0,72 \text{ (FE)}$$

- 3 **1.6** Differenz: $g(x) - e^{-x} = x e^{-x} \geq 0$ für $0 \leq x \leq 2$.

Nach 1.2 ist $g'(x) = -x e^{-x}$, also ist $-g$ eine Stammfunktion von $x e^{-x}$:

$$\int_0^2 x e^{-x} dx = [-g(x)]_0^2 = g(0) - g(2) = 1 - \frac{3}{e^2} \approx 0,59 \text{ (FE)}$$

Bewertung: volle BE auch für andere korrekte Wege (z. B. Stammfunktionen von g und e^{-x} getrennt).

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE	- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A II - (Fortsetzung)	
3	2.1 Boden: Länge $48 - 2x$, Breite $30 - 2x$; Höhe x $V(x) = x(48 - 2x)(30 - 2x) = x(1440 - 156x + 4x^2) = 4x^3 - 156x^2 + 1440x$ Sinnvoll: $x > 0$ und $30 - 2x > 0$, also $D_V =]0; 15[$	
5	2.2 $V'(x) = 12x^2 - 312x + 1440 = 12(x^2 - 26x + 120) = 12(x - 6)(x - 20)$ $V'(x) = 0 \Rightarrow x = 6$ ($x = 20 \notin D_V$); $V''(x) = 24x - 312$, $V''(6) = -168 < 0$: Maximum Abmessungen: $36 \text{ cm} \times 18 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$; $V(6) = 6 \cdot 36 \cdot 18 = 3888$ (in cm^3), also etwa 3,9 Liter.	
3	2.3 Werden Länge und Breite des Blechs verdoppelt, so ist die ganze Figur im Maßstab 2 : 1 vergrößert; die optimale Schachtel ist die im Maßstab 2 : 1 vergrößerte Schachtel aus 2.2 ($x = 12$). Beim Vergrößern mit dem Faktor 2 werden alle drei Kanten doppelt so lang, das Volumen wird $2^3 = 8$ -mal so groß: $8 \cdot 3888 = 31104$ (in cm^3). Die Aussage ist falsch: Das größtmögliche Volumen verachtfacht sich. <i>Bewertung:</i> volle BE nur mit Begründung über die Ähnlichkeit (Faktor 2^3); eine erneute vollständige Rechnung ist nicht verlangt.	
3	3.1 $r(t) = 0 \iff t^2 - 8t + 12 = 0 \iff t = 2$ oder $t = 6$ (Schnittpunkte von G_r mit der t -Achse) $r(t) > 0$ für $0 \leq t < 2$ und $6 < t \leq 8$: Die Wassermenge nimmt zu. $r(t) < 0$ für $2 < t < 6$: Die Wassermenge nimmt ab.	
3	3.2 Änderung der Wassermenge: $\int_0^8 r(t) dt = \left[\frac{1}{6}t^3 - 2t^2 + 6t \right]_0^8 = \frac{256}{3} - 128 + 48 = \frac{16}{3}$ Wassermenge nach 8 Stunden: $20 + \frac{16}{3} \approx 25,3$ (in m^3)	
3	3.3 Die Wassermenge $V(t) = 20 + \int_0^t r(s) ds$ hat bei $t = 6$ ein lokales Minimum (r wechselt von $-$ nach $+$). $V(6) = 20 + (36 - 72 + 36) = 20$ – genauso viel wie zu Beginn ($V(0) = 20$); bei $t = 8$ ist V größer. Die Behauptung ist nur teilweise richtig: Nach 6 Stunden ist die Wassermenge zwar minimal, aber zu Beginn war genauso wenig Wasser im Pool (Randminimum gleich groß). <i>Bewertung:</i> 1 BE lokales Minimum, 1 BE Wert $V(6)$, 1 BE Vergleich mit dem Randwert.	
43		

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - S I -

- 3 **1.1** X : Anzahl der Gewinnlose, $X \sim B(5; 0,3)$
 $P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^3 = 0,3087$; $P(X \geq 1) = 1 - 0,7^5 = 0,83193$
- 4 **1.2** $P(X \geq 1) = 1 - 0,7^n \geq 0,95 \Rightarrow 0,7^n \leq 0,05 \Rightarrow n \cdot \ln(0,7) \leq \ln(0,05)$
 $n \geq \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,7)} \approx 8,4$ (Umkehr des Ungleichheitszeichens wegen $\ln(0,7) < 0$)
 Man muss mindestens 9 Lose kaufen.
- 4 **1.3** Reinerlös pro Los: Niete 2 €, Trostpreis 2 € – 1 € = 1 €, Hauptpreis 2 € – 10 € = –8 €
- | | | | |
|------------|------|------|------|
| x in € | 2 | 1 | –8 |
| $P(X = x)$ | 0,70 | 0,25 | 0,05 |
- $E(X) = 2 \cdot 0,70 + 1 \cdot 0,25 + (-8) \cdot 0,05 = 1,25$
 Auf lange Sicht nehmen die Veranstalter im Mittel 1,25 € pro verkauftem Los ein.
- 3 **2.1** Baumdiagramm: erste Stufe S (0,6) / $\bar{S}$ (0,4), zweite Stufe M / $\bar{M}$ mit 0,5 bzw. 0,2.
 $P(M) = 0,6 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,2 = 0,30 + 0,08 = 0,38$
- 3 **2.2** $P_M(S) = \frac{0,30}{0,38} \approx 0,789$
 Unter den Käufern mehrerer Lose sind etwa 79 % Schülerinnen und Schüler, deutlich mehr als ihr Anteil von 60 % unter allen Loskäufern: Sie kaufen häufiger mehrere Lose.
- 4 **3.1** Testgröße X : Anzahl der Gewinnlose unter 50; $X \sim B(50; p)$
 $H_0: p \geq 0,3$; $H_1: p < 0,3$; Ablehnungsbereich $\bar{A} = \{0; \dots; k\}$
 $P_{0,3}(X \leq k) \leq 0,05$:
 $P(X \leq 9) = 0,04023$, $P(X \leq 10) = 0,07885 \Rightarrow k = 9$
 Entscheidungsregel: Sind höchstens 9 der 50 Lose Gewinnlose, wird H_0 abgelehnt und die Vermutung der Besucher als gestützt angesehen; sonst nicht.
- 2 **3.2** 8 liegt im Ablehnungsbereich: H_0 wird abgelehnt; die Vermutung, dass weniger als 30 % Gewinnlose in der Trommel sind, wird gestützt.
 Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Entscheidung falsch ist (Fehler 1. Art), beträgt höchstens 5 %.

23

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - S II -

3 1.1

	B	$\bar{B}$	Σ
E	0,30	0,15	0,45
$\bar{E}$	0,40	0,15	0,55
Σ	0,70	0,30	1

3 1.2 $P_E(B) = \frac{0,30}{0,45} \approx 0,667$; $P_{\bar{E}}(B) = \frac{0,40}{0,55} \approx 0,727$

Die Aussage trifft zu: Von den E-Book-Nutzern leihen etwa 67 % gedruckte Bücher aus, von den übrigen Mitgliedern etwa 73 %. Die Ereignisse E und B sind stochastisch abhängig.

Bewertung: volle BE nur bei Vergleich bedingter Wahrscheinlichkeiten (nicht nur 0,30 mit 0,70).

5 2.1

y in €	4	5	6	9
$P(Y = y)$	0,15	0,40	0,15	0,30

$$E(Y) = 4 \cdot 0,15 + 5 \cdot 0,40 + 6 \cdot 0,15 + 9 \cdot 0,30 = 6,20$$

Auf lange Sicht zahlt ein Mitglied im Mittel 6,20 € Monatsgebühr.

4 2.2 Mit der neuen Gebühr x : $E(Y) = 0,15 \cdot 4 + 0,40 \cdot 5 + 0,15 \cdot 6 + 0,30 x = 3,50 + 0,30 x$
 $3,50 + 0,30 x = 6,50 \Rightarrow x = 10$: Die Gebühr für Mitglieder, die beides nutzen, müsste 10 € betragen.

4 3 20 Mitglieder, jeweils Treffer „leiht gedruckte Bücher aus“ mit $p = 0,7$; bei vielen Mitgliedern ist die Auswahl annähernd unabhängig und p konstant: $Z \sim B(20; 0,7)$

$$P(Z = 14) = B(20; 0,7; 14) = B(20; 0,3; 6) = 0,19164$$

$$P(Z \geq 16) = P(\text{höchstens 4 ohne gedruckte Bücher}) = \sum_{i=0}^4 B(20; 0,3; i) = 0,23751$$

4 4 Anzahl der möglichen Pläne: $5! = 120$

Krimi am Montag und Gedichtabend am Freitag: Die übrigen drei Lesungen verteilen sich auf drei Abende: $3! = 6$

$$P = \frac{6}{120} = 0,05$$

23