

Musterprüfung Nr. 003 zum Fachabitur
zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Teil 1: ohne Hilfsmittel

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben sämtliche Aufgaben zu bearbeiten.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

1.0 Gegeben ist die Funktion

$$f: x \mapsto x^4 - 4x^2, \quad D_f = \mathbb{R}$$

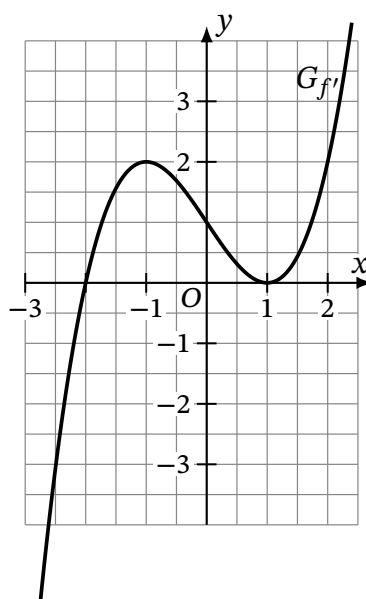
Der Graph von f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

3 1.1 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f samt ihrer Vielfachheit.

4 1.2 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f .

3 1.3 Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an G_f im Punkt $P(1 \mid f(1))$.

2.0 Die Abbildung zeigt den Graphen $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f' einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f .



4 2.1 Entscheiden Sie jeweils anhand der Abbildung, ob folgende Aussagen wahr (w) oder falsch (f) sind bzw. ob dies mit den gegebenen Informationen nicht entscheidbar (n. e.) ist. Kreuzen Sie entsprechend an.

Hinweis: Jedes richtig gesetzte Kreuz ergibt +1 BE, jedes falsch gesetzte - 0,5 BE und jedes nicht gesetzte 0 BE. Im ungünstigsten Fall wird die Aufgabe mit 0 BE bewertet.

Aussage	w	f	n. e.
Der Graph von f hat an der Stelle $x = -2$ einen Tiefpunkt.			
Der Graph von f hat an der Stelle $x = 1$ einen Hochpunkt.			
Der Graph von f ist im Intervall $] -1; 1[$ rechtsgekrümmt.			
Es gilt $f(0) = 0$.			

2 2.2 Geben Sie den kleinstmöglichen Grad der Funktion f an und begründen Sie Ihre Angabe.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- 3.0 Der Graph der Funktion $h : x \mapsto a \cdot e^{b \cdot x}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $D_h = \mathbb{R}$ verläuft durch die Punkte $P(0 \mid 3)$ und $Q(2 \mid 12)$.
- 3.1 Bestimmen Sie die exakten Werte von a und b .
- 3.2 Die folgenden Wertetabellen gehören zu den Funktionen $p : x \mapsto x^2 + 1$, $q : x \mapsto 2^x$ und $r : x \mapsto 2x + 1$ (jeweils $D = \mathbb{R}$).

x	0	1	2	3
Tabelle A	1	3	5	7
Tabelle B	1	2	5	10
Tabelle C	1	2	4	8

Entscheiden Sie, welche Tabelle zu welcher Funktion gehört, und begründen Sie Ihre Entscheidung für q und r ohne Einsetzen anhand der Änderung der Funktionswerte.

22

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Eine Basketballspielerin trifft bei einem Freiwurf mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 %. Sie wirft zweimal; die Würfe sind voneinander unabhängig (Treffer T, kein Treffer N).

2 **1.1** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie genau einmal trifft.

2 **1.2** Beschreiben Sie das Ereignis $E = \{TN; NT; NN\}$ sowie sein Gegenereignis $\bar{E}$ in Worten.

2.0 Bei einer Umfrage auf dem Pausenhof kommen 50 % der Befragten mit dem Bus zur Schule (A), 40 % essen mittags in der Mensa (B) und auf 25 % trifft beides zu. Eine befragte Person wird zufällig ausgewählt.

	B	$\bar{B}$	Σ
A	0,25		0,50
$\bar{A}$			
Σ	0,40		1

2 **2.1** Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel.

2 **2.2** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person, die in der Mensa isst, mit dem Bus zur Schule kommt.

3.0 Bei einem Spiel werden zwei Laplace-Münzen geworfen. Der Einsatz beträgt 1 €. Zeigen beide Münzen Kopf, werden 4 € ausgezahlt, sonst nichts. Die Zufallsgröße X gibt den Gewinn des Spielers (Auszahlung minus Einsatz) an.

2 **3.1** Zeigen Sie, dass das Spiel fair ist.

2 **3.2** Nun werden drei Laplace-Münzen geworfen; nur wenn alle drei Kopf zeigen, werden 4 € ausgezahlt. Entscheiden Sie ohne Rechnung, ob das Spiel dann für den Spieler günstig oder ungünstig ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

12

Musterprüfung Nr. 003 zum Fachabitur
zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Teil 2: mit Hilfsmitteln

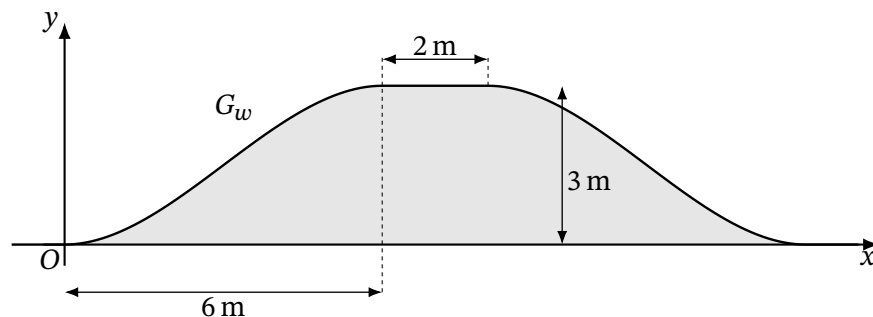
Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen Hilfsmittel verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen *Analysis* und *Stochastik* zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

- 1.0** Entlang einer Bundesstraße wird ein 120 m langer Lärmschutzwall aufgeschüttet. Sein Querschnitt besteht aus zwei gleichen Hängen mit je 6 m waagrechter Länge und einer 2 m breiten, waagrechten Krone in 3 m Höhe (siehe nicht maßstäbliche Skizze, Querschnitt grau).



Der linke Hang wird im Koordinatensystem der Skizze durch den Graphen G_w der Funktion w mit $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, und $D_w = [0; 6]$ beschrieben. Dabei geben x und $w(x)$ Längen in Metern an. Der Hang geht knickfrei in das ebene Gelände und in die Krone über.

Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

- 1.1** Bestimmen Sie die Werte der Parameter a , b , c und d .
[Mögliches Ergebnis: $w(x) = -\frac{1}{36}x^3 + \frac{1}{4}x^2$]
- 1.2** Ermitteln Sie die Stelle, an der der Hang am steilsten ist, und geben Sie die Steigung an dieser Stelle in Prozent an.
- 1.3** Damit der Hang mit einem Mähgerät befahren werden kann, darf seine Steigung nirgends größer als 50 % sein. Ein Planer meint: „Einen Meter vom Fuß entfernt ist der Hang weniger als 50 % steil, also ist er befahrbar.“
Untersuchen Sie, ob diese Schlussfolgerung zutrifft.
- 1.4** Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_w in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab für beide Achsen: $1 \text{ m} \hat{=} 1 \text{ cm}$
- 1.5** Bestimmen Sie mithilfe Ihrer Zeichnung näherungsweise den Inhalt des Flächenstücks zwischen G_w , der x -Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = 6$.
- 1.6** Berechnen Sie den exakten Inhalt dieses Flächenstücks und damit das Volumen des Lärmschutzwalls.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- 2.0** Ein Pizzastein wird in einem auf 250 °C vorgeheizten Backofen erhitzt. Ein Funkthermometer zeigt beim Einlegen eine Temperatur von 20 °C und nach 10 Minuten 140 °C an. Die Temperatur des Steins wird modellhaft durch die Funktion T mit

$$T(t) = 250 - 230 \cdot e^{-k \cdot t}, \quad t \in \mathbb{R}_0^+$$

und $k \in \mathbb{R}^+$ beschrieben. Dabei ist t die Zeit in Minuten seit dem Einlegen und $T(t)$ die Temperatur in °C.

Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

- 3 2.1** Bestimmen Sie mithilfe des Messwerts nach 10 Minuten den Wert von k . Runden Sie auf zwei Nachkommastellen.

Im Folgenden gilt:

$$T(t) = 250 - 230 \cdot e^{-0,07 \cdot t}$$

- 3 2.2** Eine Pizza soll erst eingelegt werden, wenn der Stein mindestens 200 °C heiß ist. Ermitteln Sie, ab welchem Zeitpunkt das nach dem Modell der Fall ist. Runden Sie auf eine Nachkommastelle.

- 4 2.3** Berechnen Sie $\dot{T}(0)$ und $\dot{T}(10)$ und deuten Sie die beiden Werte und ihren Unterschied im Sachzusammenhang.

- 3 2.4** Nach 60 Minuten zeigt das Thermometer 238 °C. Untersuchen Sie, wie gut das Modell diesen Messwert beschreibt, und erläutern Sie eine mögliche Ursache für die Abweichung.

- 4 2.5** Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen von T für $0 \leq t \leq 60$ in ein Koordinatensystem.
Maßstab: 5 min $\hat{=}$ 1 cm; 50 °C $\hat{=}$ 1 cm

- 3 2.6** Der Ofen wird auf 280 °C eingestellt; die Temperatur des Steins wird dann durch $T^*(t) = 280 - 260 \cdot e^{-0,07 \cdot t}$ beschrieben. Entscheiden Sie ohne Rechnung, wie sich der Graph dadurch verändert und ob der Stein 200 °C früher oder später erreicht, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

43

BE

1.0 Gegeben ist die Funktion

$$g: x \mapsto -x^3 + 3x + 2, \quad D_g = \mathbb{R}$$

Der Graph von g in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

1.1 Ermitteln Sie die Nullstellen von g samt ihrer Vielfachheit und geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von g für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow +\infty$ an.

1.2 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_g .

1.3 Der Graph G_g hat im Punkt $W(0 \mid 2)$ seinen Wendepunkt (Nachweis nicht erforderlich). Untersuchen Sie, ob die Tangente an G_g im Punkt W außer W weitere gemeinsame Punkte mit G_g hat.

1.4 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse G_g für $-1,8 \leq x \leq 2,2$ sowie die Tangente aus 1.3 in ein Koordinatensystem.

Maßstab für beide Achsen: $1 \text{ LE} \hat{=} 1 \text{ cm}$

Verwenden Sie dazu die folgende Wertetabelle.

x	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$g(x)$								

1.5 Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das G_g mit der x -Achse einschließt.

1.6 Beschreiben Sie ohne Rechnung den Verlauf des Graphen einer Stammfunktion G von g für $x \geq -2$ und begründen Sie dabei die Lage besonderer Punkte.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- 2.0** Ein Paketdienst befördert Pakete nur, wenn das Gurtmaß – die Länge plus zweimal die Breite plus zweimal die Höhe – höchstens 300 cm beträgt; die Länge ist dabei die längste Seite des Pakets. Ein Versandhändler verwendet Pakete mit quadratischer Stirnfläche der Seitenlänge x (in cm) und nutzt das Gurtmaß voll aus.
Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.
- 3 **2.1** Zeigen Sie, dass für das Volumen eines solchen Pakets gilt: $V(x) = 300x^2 - 4x^3$. Geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge für V an.
- 5 **2.2** Ermitteln Sie die Abmessungen des Pakets mit dem größtmöglichen Volumen und geben Sie dieses Volumen in Litern an.
- 3 **2.3** Ein Mitarbeiter behauptet: „Zu jedem möglichen Volumen gehört genau eine Seitenlänge x .“
Untersuchen Sie diese Behauptung am Beispiel des Volumens $224\,000\text{ cm}^3$.
- 3.0** Eine Systemkamera kostet neu 3000 €. Nach zwei Jahren beträgt ihr Wiederverkaufswert noch 1920 €.
Der Wert wird modellhaft durch die Funktion W mit $W(t) = 3000 \cdot b^t$, $b \in \mathbb{R}^+$, $t \in \mathbb{R}_0^+$ beschrieben (t in Jahren, $W(t)$ in €).
- 3 **3.1** Bestimmen Sie den Wert von b und deuten Sie ihn im Sachzusammenhang.
- 3 **3.2** Ermitteln Sie, ab welchem Zeitpunkt der Wert nach dem Modell unter 1000 € liegt. Runden Sie auf eine Nachkommastelle.
- 3 **3.3** Ein Händler rechnet stattdessen mit einem jährlichen Wertverlust von 20 % des Neupreises. Untersuchen Sie, wie sich die beiden Modelle nach fünf Jahren unterscheiden, und beurteilen Sie, welches Modell für ältere Kameras geeigneter ist.

43

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

- 1.0** Ein Hersteller füllt Kaffeekapseln auf zwei Maschinen ab: 60 % der Kapseln stammen von Maschine A, die übrigen von Maschine B. Bei Maschine A sind 2 % der Kapseln undicht (D), bei Maschine B 5 %. Eine Kapsel wird zufällig ausgewählt.
- 4 **1.1** Bestimmen Sie mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kapsel undicht ist.
[Teilergebnis: $P(D) = 0,032$]
- 3 **1.2** Beschreiben Sie das Ereignis $A \cup D$ in Worten und berechnen Sie seine Wahrscheinlichkeit.
- 3 **1.3** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine undichte Kapsel von Maschine A stammt, und interpretieren Sie das Ergebnis im Vergleich zu 60 %.
- 2.0** Eine Packung enthält 50 Kapseln von Maschine B. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der undichten Kapseln an.
- 3 **2.1** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
 E_1 : „Genau zwei Kapseln sind undicht.“
 E_2 : „Höchstens drei Kapseln sind undicht.“
- 2 **2.2** Jede undichte Kapsel verursacht dem Hersteller durch Reklamationen Kosten von 2 €. Berechnen Sie die zu erwartenden Kosten pro Packung.
- 2 **2.3** In einer Reihe von 20 Kapseln sind genau drei undicht. Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Lagen dieser drei Kapseln in der Reihe.
- 3.0** Ein Großkunde vermutet, dass bei Maschine B inzwischen mehr als 5 % der Kapseln undicht sind (Gegenhypothese). Die Vermutung soll auf einem Signifikanzniveau von 5 % anhand von 100 zufällig ausgewählten Kapseln getestet werden.
- 4 **3.1** Entwickeln Sie einen geeigneten Hypothesentest und formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel im Sachzusammenhang.
- 2 **3.2** Bei der Prüfung mit einem Dichtheits-Messgerät sind 9 der 100 Kapseln undicht. Interpretieren Sie dieses Ergebnis im Hinblick auf die Vermutung des Kunden.

23

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

- 1.0** In einem Kino sehen 35 % der Besucher einen 3D-Film (D), 60 % kaufen Popcorn (P) und 28 % der Besucher tun beides.
- 3 1.1** Erstellen Sie eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel für die Ereignisse D und P .
- 3 1.2** Der Betreiber meint: „3D-Besucher kaufen genauso häufig Popcorn wie alle anderen Besucher.“
Untersuchen Sie, ob diese Aussage zutrifft.
- 5 2.1** Eine Eintrittskarte kostet für einen 3D-Film 12 €, sonst 9 €; Popcorn kostet 5 €. Die Zufallsgröße Y gibt die Ausgaben eines zufällig ausgewählten Besuchers für Karte und Popcorn an.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y sowie den Erwartungswert von Y und interpretieren Sie diesen.
- 4 2.2** Der Betreiber möchte die durchschnittlichen Ausgaben pro Besucher auf 14,10 € erhöhen, indem er nur den Preis der 3D-Karte ändert. Ermitteln Sie diesen Preis.
- 4 3** 20 Besucher werden zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße Z gibt die Anzahl der 3D-Besucher unter ihnen an. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse „Genau sieben sehen einen 3D-Film“ und „Mindestens zehn sehen einen 3D-Film“. Begründen Sie dabei, dass Z als binomialverteilt angesehen werden kann.
- 4 4** Fünf Freunde setzen sich zufällig auf fünf nebeneinanderliegende Plätze. Berechnen Sie die Anzahl der möglichen Sitzordnungen sowie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei bestimmte der fünf Freunde nebeneinandersitzen.

23