

Musterprüfung Nr. 002 zum Fachabitur
zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Teil 1: ohne Hilfsmittel

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben sämtliche Aufgaben zu bearbeiten.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

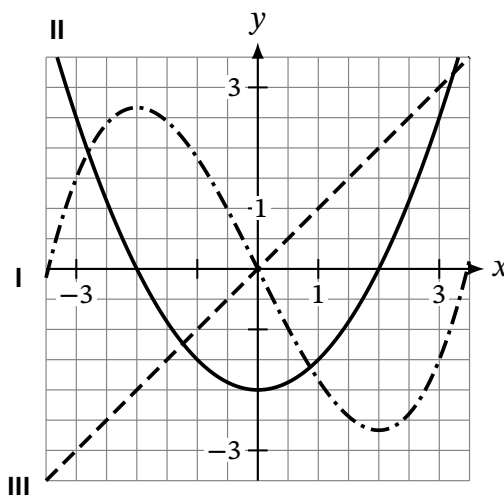
BE

1.0 Gegeben ist die Funktion

$$f : x \mapsto -x^3 + 3x^2, \quad D_f = \mathbb{R}$$

Der Graph von f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

- 3 1.1 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f samt ihrer Vielfachheit und geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \rightarrow -\infty$ und für $x \rightarrow +\infty$ an.
- 4 1.2 Die Funktion f^* ergibt sich aus f , indem die Definitionsmenge auf $[-1; 3]$ eingeschränkt wird. Bestimmen Sie die Wertemenge von f^* .
- 3 1.3 Der Graph G_f hat an der Stelle $x = 1$ einen Wendepunkt (Nachweis nicht erforderlich). Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an G_f in diesem Wendepunkt.
- 4 2 Die Abbildung zeigt die Graphen I, II und III einer ganzrationalen Funktion g , ihrer Ableitungsfunktion g' und einer Stammfunktion G von g , jeweils mit der Definitionsmenge $\mathbb{R}$.



Entscheiden Sie, welcher der Graphen zu g , zu g' und zu G gehört, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

3.0 Gegeben ist die Funktion

$$g: x \mapsto 3 - e^{0,5x}, \quad D_g = \mathbb{R}$$

Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

2 3.1 Berechnen Sie die exakten Koordinaten der Schnittpunkte von G_g mit den Koordinatenachsen.

3 3.2 Beschreiben Sie, wie G_g aus dem Graphen der Funktion $x \mapsto e^x$, $D = \mathbb{R}$, durch geometrische Abbildungen hervorgeht.

3 3.3 Berechnen Sie den exakten Wert des Integrals $\int_0^{2\ln(3)} g(x) \, dx$.

22

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

- 1.0** Ein Fahrradschloss hat ein Zahlenschloss mit vier Ringen, auf denen jeweils die Ziffern 0 bis 9 eingestellt werden können.
- 2 **1.1** Bestimmen Sie die Anzahl der Codes, die aus vier verschiedenen Ziffern bestehen.
- 2 **1.2** Die Ringe werden zufällig verdreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der eingestellte Code aus vier verschiedenen Ziffern besteht.
- 2.0** Bei einer Schulumfrage geben 70 % der Befragten an, einen Streamingdienst zu nutzen (S), 40 % sind Mitglied in einem Sportverein (V) und auf 25 % trifft beides zu. Eine befragte Person wird zufällig ausgewählt.
- 2 **2.1** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Person weder einen Streamingdienst nutzt noch Mitglied in einem Sportverein ist.
- 2 **2.2** Untersuchen Sie, ob die Ereignisse S und V stochastisch unabhängig sind.
- 3.0** In einem Säckchen liegen zwei rote und drei weiße Murmeln. Es werden nacheinander zwei Murmeln ohne Zurücklegen gezogen. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der gezogenen roten Murmeln an.
- 2 **3.1** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und den Erwartungswert von X .
- 2 **3.2** Ein Mitschüler behauptet: „Zieht man mit Zurücklegen, erhält man im Mittel mehr rote Murmeln, weil die roten Murmeln dann nicht verbraucht werden.“
Entscheiden Sie ohne Rechnung, ob die Behauptung zutrifft, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

12

Musterprüfung Nr. 002 zum Fachabitur
zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Teil 2: mit Hilfsmitteln

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen Hilfsmittel verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen *Analysis* und *Stochastik* zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

- 1.0** In der Zisterne eines Schulgartens wird Regenwasser gesammelt. An einem Tag beschreibt die Funktion r mit

$$r(t) = 0,05t^3 - 0,9t^2 + 3,6t = 0,05t(t - 6)(t - 12), \quad D_r = [0; 12]$$

die momentane Änderungsrate des Wasservolumens in der Zisterne. Dabei ist t die Zeit in Stunden ab 6:00 Uhr und $r(t)$ die Änderungsrate in $\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$. Positive Werte bedeuten, dass der Zufluss durch Regen überwiegt, negative Werte, dass die Entnahme zum Gießen überwiegt. Um 6:00 Uhr befinden sich 5 m^3 Wasser in der Zisterne; sie fasst höchstens 22 m^3 .

Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

- 1.1** Berechnen Sie $r(2)$ und interpretieren Sie den Wert im Sachzusammenhang.
- 1.2** Ermitteln Sie den Zeitpunkt im Intervall $[0; 6]$, zu dem das Wasservolumen am stärksten zunimmt, sowie die zugehörige Änderungsrate. Runden Sie auf zwei Nachkommastellen.
- 1.3** Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_r in ein Koordinatensystem.

Maßstab: $1 \text{ h} \hat{=} 1 \text{ cm}$; $1 \frac{\text{m}^3}{\text{h}} \hat{=} 1 \text{ cm}$

Verwenden Sie dazu die folgende Wertetabelle.

t	0	2	4	6	8	10	12
$r(t)$							

- 1.4** Berechnen Sie, um wie viele Kubikmeter das Wasservolumen in den ersten sechs Stunden zunimmt.
- 1.5** Untersuchen Sie, ob die Zisterne an diesem Tag überläuft.
- 1.6** Eine Schülerin behauptet: „Zu dem in 1.2 ermittelten Zeitpunkt befindet sich am meisten Wasser in der Zisterne.“
Untersuchen Sie, ob diese Behauptung zutrifft.
- 1.7** Begründen Sie ohne weitere Integralrechnung, dass sich um 18:00 Uhr wieder genau 5 m^3 Wasser in der Zisterne befinden.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

2.0 Gegeben ist die Funktion

$$k: x \mapsto (x+1)^2 \cdot e^{-x}, \quad D_k = \mathbb{R}$$

Der Graph von k in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_k bezeichnet.

- 3 2.1 Ermitteln Sie die Nullstelle von k samt ihrer Vielfachheit sowie das Verhalten der Funktionswerte von k für $x \rightarrow -\infty$ und für $x \rightarrow +\infty$.
- 6 2.2 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_k .
[Mögliches Teilergebnis: $k'(x) = (1 - x^2) \cdot e^{-x}$]
- 3 2.3 Bestimmen Sie die Wertemenge von k und begründen Sie Ihre Angabe.
- 4 2.4 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_k für $-1,5 \leq x \leq 5$ in ein Koordinatensystem.
Maßstab für beide Achsen: $1 \text{ LE} \hat{=} 2 \text{ cm}$
- 3 2.5 Skizzieren Sie ohne Rechnung in ein neues Koordinatensystem den Graphen einer Stammfunktion K von k für $-1,5 \leq x \leq 5$ und begründen Sie wesentliche Merkmale Ihrer Skizze mithilfe der Eigenschaften von k .

43

BE

- 1.0** Auf einem Gartenteich mit einer Wasserfläche von 150 m^2 breiten sich Wasserlinsen aus. Eine Teich-App bestimmt aus Fotos alle zwei Wochen die bedeckte Fläche:

Zeit in Wochen	0	2	4
bedeckte Fläche in m^2	4	9	19

Die bedeckte Fläche wird modellhaft durch die Funktion A mit

$$A(t) = 4 \cdot e^{k \cdot t}, \quad t \in \mathbb{R}_0^+$$

und $k \in \mathbb{R}^+$ beschrieben. Dabei ist t die Zeit in Wochen und $A(t)$ die bedeckte Fläche in m^2 .

Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

- 1.1** Bestimmen Sie mithilfe des Messwerts für $t = 2$ den Wert des Parameters k . Runden Sie auf eine Nachkommastelle.

Im Folgenden gilt:

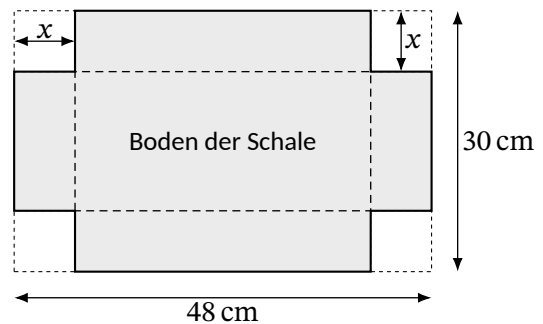
$$A(t) = 4 \cdot e^{0,4 \cdot t}$$

- 1.2** Ein Mitschüler beschreibt die Messwerte mit einer linearen Funktion L , deren Graph durch die ersten beiden Messpunkte verläuft. Untersuchen Sie, welches der beiden Modelle den Messwert nach vier Wochen besser beschreibt.
- 1.3** Berechnen Sie, nach welcher Zeit der Teich nach dem Modell A vollständig bedeckt wäre. Runden Sie auf eine Nachkommastelle.
- 1.4** Berechnen Sie $\dot{A}(5)$ und interpretieren Sie den Wert im Sachzusammenhang.
- 1.5** Im folgenden Jahr sind zu Beginn bereits 8 m^2 bedeckt; die Ausbreitung erfolgt mit dem gleichen Wert von k . Ermitteln Sie, um wie viele Wochen früher der Teich dann vollständig bedeckt wäre.
- 1.6** Erläutern Sie, warum das Modell A die Entwicklung der bedeckten Fläche nur für einen begrenzten Zeitraum beschreiben kann.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- 2.0** Aus einem rechteckigen Stück Karton mit den Seitenlängen 48 cm und 30 cm soll eine oben offene Anzuchtschale für Pflanzen gefaltet werden. Dazu werden an den vier Ecken gleich große Quadrate mit der Seitenlänge x (in cm) ausgeschnitten und die Ränder hochgeklappt (siehe nicht maßstäbliche Skizze).



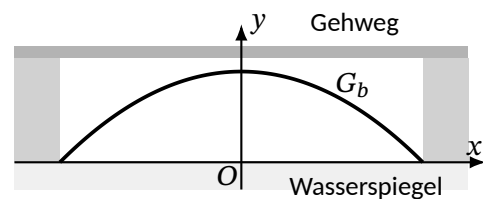
Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

- 2.1** Zeigen Sie, dass für das Volumen der Schale gilt: $V(x) = 4x^3 - 156x^2 + 1440x$. Geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge für V an.
- 2.2** Ermitteln Sie die Seitenlänge x , für die das Volumen der Schale am größten ist, sowie die Abmessungen und das Volumen dieser Schale.
- 2.3** Damit die Schale in ein Regalfach passt, darf sie höchstens 5 cm hoch sein. Ermitteln Sie unter dieser Bedingung das größtmögliche Volumen der Schale.

- 3.0** Eine Fußgängerbrücke überspannt einen Kanal mit einem parabelförmigen Bogen. Im Koordinatensystem der Skizze beschreibt der Graph G_b der Funktion b mit

$$b(x) = -\frac{1}{16}x^2 + 4$$

die Unterkante des Bogens; die x -Achse stellt den Wasserspiegel dar. Dabei entspricht eine Längeneinheit 1 m. Betrachtet wird nur der Teil von G_b oberhalb der x -Achse.



- 3.1** Geben Sie die Spannweite des Bogens auf Höhe des Wasserspiegels und die größte Höhe des Bogens über dem Wasserspiegel an.
- 3.2** Berechnen Sie den Winkel, unter dem der Bogen im Punkt $(8 | 0)$ auf den Wasserspiegel trifft.
- 3.3** Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Bogen und dem Wasserspiegel.
- 3.4** Ein Ausflugsboot ragt 3 m über den Wasserspiegel. Ermitteln Sie die Breite des Bereichs, in dem der Bogen mindestens 3 m hoch ist.
- 3.5** Ein Passant schätzt: „In halber Höhe ist der Bogen halb so breit wie auf Höhe des Wasserspiegels.“ Untersuchen Sie, ob diese Schätzung zutrifft.

43

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

- 1.0** Ein Paketdienst stellt in einer Straße nacheinander drei Pakete zu. Jedes Paket kann unabhängig von den anderen mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % beim ersten Versuch zugestellt werden (Z), andernfalls nicht (N).
- 1.1** Geben Sie einen geeigneten Ergebnisraum Ω an sowie die Anzahl seiner Elemente.
- 1.2** Formulieren Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $0,8^3 + 3 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2$ berechnet werden kann.
- 1.3** Gegeben sind die Ereignisse
 A : „Das erste Paket wird beim ersten Versuch zugestellt.“
 B : „Das dritte Paket wird beim ersten Versuch zugestellt.“
 Beschreiben Sie das Ereignis $\overline{A \cup B}$ in Worten und berechnen Sie seine Wahrscheinlichkeit.
- 2.0** An einem Tag stellt ein Fahrer 20 Pakete zu. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Pakete an, die nicht beim ersten Versuch zugestellt werden können.
- 2.1** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
 E_1 : „Genau vier Pakete können nicht beim ersten Versuch zugestellt werden.“
 E_2 : „Mehr als fünf Pakete können nicht beim ersten Versuch zugestellt werden.“
- 2.2** Jedes Paket, das nicht beim ersten Versuch zugestellt werden kann, wird genau ein zweites Mal zugestellt; jeder solche zweite Zustellversuch verursacht Kosten von 3 €. Berechnen Sie die zu erwartenden Kosten für diesen Tag.
- 3.0** Nach der Einführung von Abholstationen vermutet der Paketdienst, dass der Anteil der Pakete, die nicht beim ersten Versuch zugestellt werden können, unter 20 % gesunken ist (Gegenhypothese). Die Vermutung soll auf einem Signifikanzniveau von 5 % anhand von 100 zufällig ausgewählten Paketen getestet werden.
- 3.1** Entwickeln Sie einen geeigneten Hypothesentest und formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel im Sachzusammenhang.
- 3.2** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art, wenn der Anteil tatsächlich nur noch 10 % beträgt.
- 4.0** In einem Paketshop gibt es eine Wand mit 12 nummerierten Fächern. Fünf verschiedene Pakete werden zufällig auf verschiedene Fächer verteilt.
- 4.1** Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, die fünf Pakete auf die Fächer zu verteilen.
- 4.2** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Fach mit der Nummer 1 leer bleibt.

23

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Bei einem Blutspendedienst haben 43 % der Spender die Blutgruppe A (A) und 85 % sind Rhesus-positiv (R). Blutgruppe und Rhesusfaktor werden unabhängig voneinander vererbt; die Ereignisse A und R werden daher als stochastisch unabhängig betrachtet.

4 **1.1** Erstellen Sie eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel für die Ereignisse A und R .

2 **1.2** Erläutern Sie, warum der Anteil der Spender mit Blutgruppe A unter den Rhesus-positiven Spendern ebenfalls 43 % beträgt.

4 **2** Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Rhesus-negativen Spender unter 50 zufällig ausgewählten Spendern an.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert von X innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegt. Begründen Sie dabei, dass X als binomialverteilt angesehen werden kann.

5 **3** Für einen Notfall wird dringend ein Rhesus-negativer Spender benötigt. Spender aus der Kartei werden nacheinander zufällig angerufen, bis ein Rhesus-negativer Spender erreicht ist, höchstens jedoch drei. Die Zufallsgröße Y gibt die Anzahl der Anrufe an. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y sowie den Erwartungswert von Y und interpretieren Sie den Erwartungswert im Sachzusammenhang.

4.0 Ein Schnelltest soll Rhesus-negatives Blut erkennen. Ist das Blut Rhesus-negativ, zeigt der Test in 98 % der Fälle „negativ“ (T); ist es Rhesus-positiv, zeigt er in 1 % der Fälle fälschlicherweise ebenfalls „negativ“.

4 **4.1** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Blut eines Spenders tatsächlich Rhesus-negativ ist, wenn der Test „negativ“ zeigt.

4 **4.2** In der Begleit-App des Tests heißt es: „Zeigt der Test ‚negativ‘, ist Ihr Blut mit 98 % Sicherheit Rhesus-negativ.“
Untersuchen Sie, ob diese Aussage zutrifft, und beurteilen Sie, ob das Ergebnis vor einer Transfusion durch einen Labortest bestätigt werden sollte.

23