

- Lösungshinweise -

Musterprüfung Nr. 002 zum Fachabitur
zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Notenschlüssel:

Note	Punkte	Bewertungseinheiten	
		von	bis
+	15	100	96
1	14	95	91
-	13	90	86
+	12	85	81
2	11	80	76
-	10	75	71
+	9	70	66
3	8	65	61
-	7	60	56
+	6	55	51
4	5	50	46
-	4	45	41
+	3	40	34
5	2	33	27
-	1	26	20
6	0	19	0

Ergibt die Gesamtsumme der Bewertungseinheiten n,5,
so wird einmalig zugunsten des Prüflings aufgerundet.

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 1 - A -

- 3 **1.1** $f(x) = x^2(3 - x)$
 $x_{1;2} = 0$ (doppelte Nullstelle); $x_3 = 3$ (einfache Nullstelle)
 Leitkoeffizient negativ, Grad 3: $f(x) \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow -\infty$; $f(x) \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow +\infty$
- 4 **1.2** $f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x - 2)$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = 2$
 Vorzeichen von f' : $-$ für $x < 0$, $+$ für $0 < x < 2$, $-$ für $x > 2$; lokales Minimum
 $f(0) = 0$, lokales Maximum $f(2) = 4$
 Randwerte: $f(-1) = 1 + 3 = 4$, $f(3) = 0$
 Der kleinste Funktionswert auf $[-1; 3]$ ist 0, der größte 4; da f^* stetig ist: $W_{f^*} = [0; 4]$
- 3 **1.3** $f(1) = -1 + 3 = 2$: Wendepunkt $W(1 | 2)$; $f'(1) = -3 + 6 = 3$
 Tangente: $y = 3(x - 1) + 2$, also $y = 3x - 1$
- 4 **2** Graph III ist eine Gerade, gehört also zu einer Funktion vom Grad 1; die Ableitung g' hat einen um 1 kleineren Grad als g und G einen um 1 größeren Grad: III gehört zu g' .
 Graph II hat an den Stellen $x = -2$ und $x = 2$ Nullstellen mit Vorzeichenwechsel; genau dort hat Graph I einen Hochpunkt bzw. Tiefpunkt. Also ist II der Graph der Ableitung von I: II gehört zu g , I gehört zu G .
 Kontrolle: Der Tiefpunkt von II liegt an der Stelle $x = 0$, dort hat III (die Ableitung von II) eine Nullstelle.
Bewertung: 1 BE für g' mit Begründung, 2 BE für die Zuordnung von g und G mit Begründung über Extrem- und Nullstellen, 1 BE für fachsprachlich korrekte Begründung (Nullstelle von g als Stelle, Hoch- und Tiefpunkt des Graphen von G als Punkt).
- 2 **3.1** $g(0) = 3 - 1 = 2$: Schnittpunkt mit der y -Achse $S_y(0 | 2)$
 $g(x) = 0 \Rightarrow e^{0,5x} = 3 \Rightarrow 0,5x = \ln(3) \Rightarrow x = 2 \ln(3)$: Schnittpunkt mit der x -Achse $S_x(2 \ln(3) | 0)$
- 3 **3.2** $x \mapsto e^{0,5x}$: Streckung des Graphen von $x \mapsto e^x$ in x -Richtung mit dem Faktor 2;
 $x \mapsto -e^{0,5x}$: Spiegelung an der x -Achse;
 $x \mapsto 3 - e^{0,5x}$: Verschiebung um 3 in positive y -Richtung.
- 3 **3.3** Stammfunktion: $3x - 2e^{0,5x}$

$$\int_0^{2 \ln(3)} g(x) dx = [3x - 2e^{0,5x}]_0^{2 \ln(3)} = 6 \ln(3) - 2 \cdot 3 - (0 - 2) = 6 \ln(3) - 4$$

22

BE	- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 1 - S -	
2	1.1	Für den ersten Ring gibt es 10 Möglichkeiten, für den zweiten 9, für den dritten 8, für den vierten 7: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$
2	1.2	Insgesamt gibt es $10^4 = 10\,000$ gleich wahrscheinliche Codes (Laplace-Experiment): $P = \frac{5040}{10\,000} = 0,504$
2	2.1	$P(S \cup V) = P(S) + P(V) - P(S \cap V) = 0,7 + 0,4 - 0,25 = 0,85$ $P(\bar{S} \cap \bar{V}) = 1 - P(S \cup V) = 0,15$
2	2.2	$P(S) \cdot P(V) = 0,7 \cdot 0,4 = 0,28 \neq 0,25 = P(S \cap V)$ Die Ereignisse S und V sind stochastisch abhängig.
2	3.1	$P(X = 0) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0,3$; $P(X = 1) = 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = 0,6$; $P(X = 2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0,1$ $E(X) = 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,1 = 0,8$
2	3.2	Die Behauptung trifft nicht zu. Mit Zurücklegen ist jeder Zug mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}$ rot, im Mittel erhält man $2 \cdot \frac{2}{5}$ rote Murmeln. Ohne Zurücklegen ist jeder einzelne Zug für sich betrachtet ebenfalls mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}$ rot (jede Murmel kann mit gleicher Wahrscheinlichkeit an jeder Stelle gezogen werden); der Erwartungswert bleibt also gleich. Es ändert sich nur die Verteilung (mit Zurücklegen sind zwei rote und keine rote Murmel wahrscheinlicher). <i>Bewertung:</i> 1 BE für die richtige Entscheidung, 1 BE für eine schlüssige Begründung ohne Rechnung; eine Rechnung mit $B(2; 0,4)$ als Kontrolle ist zulässig.
12		

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A I -

2 **1.1** $r(2) = 0,05 \cdot 2 \cdot (-4) \cdot (-10) = 4$

Um 8:00 Uhr nimmt das Wasservolumen in der Zisterne momentan um $4 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$ zu.

5 **1.2** $\dot{r}(t) = 0,15t^2 - 1,8t + 3,6 = 0,15(t^2 - 12t + 24)$

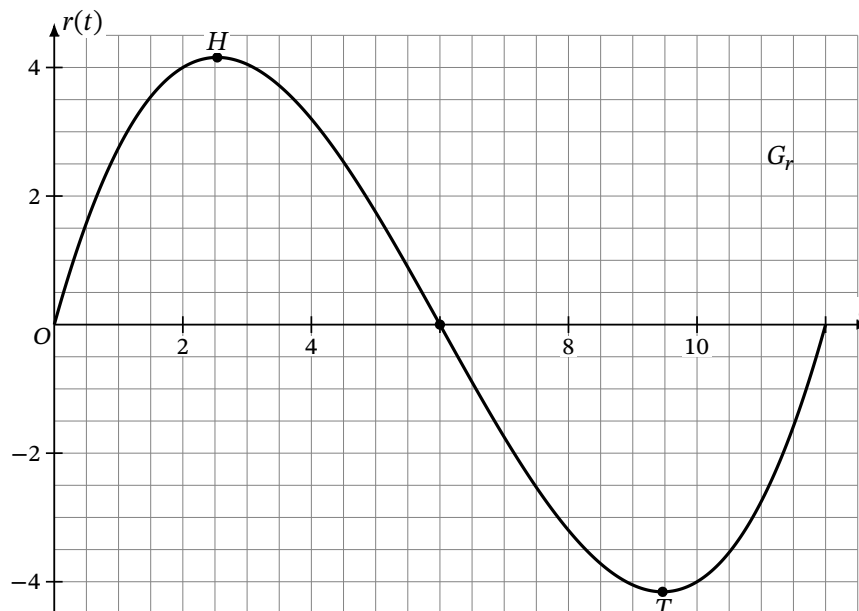
$\dot{r}(t) = 0 \Rightarrow t = 6 \pm 2\sqrt{3}$, also $t_1 \approx 2,54 \in [0; 6]$ ($t_2 \approx 9,46 \notin [0; 6]$)

$\dot{r}$ wechselt bei t_1 das Vorzeichen von $+$ nach $-$ (Parabel nach oben geöffnet, t_1 kleinere Nullstelle): lokales Maximum; Randwerte $r(0) = r(6) = 0$, also absolutes Maximum auf $[0; 6]$.

$r(2,54) \approx 4,16$: Gegen 8:32 Uhr nimmt das Volumen am stärksten zu, mit etwa $4,16 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$.

4 **1.3**

t	0	2	4	6	8	10	12
$r(t)$	0	4	3,2	0	-3,2	-4	0



4 **1.4** $\int_0^6 r(t) dt = [0,0125t^4 - 0,3t^3 + 1,8t^2]_0^6 = 16,2 - 64,8 + 64,8 = 16,2$

In den ersten sechs Stunden nimmt das Wasservolumen um $16,2 \text{ m}^3$ zu.

3 **1.5** Für $0 < t < 6$ ist $r(t) > 0$ (Volumen nimmt zu), für $6 < t < 12$ ist $r(t) < 0$ (Volumen nimmt ab). Das größte Volumen wird also um 12:00 Uhr ($t = 6$) erreicht:

$5 + 16,2 = 21,2 < 22$: Die Zisterne läuft an diesem Tag nicht über.

3 **1.6** Die Behauptung trifft nicht zu. Zum Zeitpunkt $t \approx 2,54$ ist die Änderungsrate am größten, das Volumen nimmt also am schnellsten zu. Da $r(t)$ bis $t = 6$ positiv bleibt, nimmt das Volumen danach weiter zu (nur langsamer). Am meisten Wasser ist um 12:00 Uhr in der Zisterne, wo r das Vorzeichen von $+$ nach $-$ wechselt.

Bewertung: volle BE nur bei Unterscheidung von Änderungsrate (Steigung des Bestands) und Bestand und Angabe des richtigen Zeitpunkts mit Begründung über den Vorzeichenwechsel von r .

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A I - (Fortsetzung)

- 3 **1.7** G_r ist punktsymmetrisch zum Punkt $(6 | 0)$ (z. B. aus der Zeichnung oder wegen $r(12 - t) = -r(t)$). Das Flächenstück zwischen G_r und der t -Achse über $[6; 12]$ ist daher genauso groß wie das über $[0; 6]$, liegt aber unterhalb der Achse.
- Die Abnahme von 12:00 bis 18:00 Uhr ist also genauso groß wie die Zunahme von 6:00 bis 12:00 Uhr ($16,2 \text{ m}^3$); um 18:00 Uhr befinden sich wieder 5 m^3 in der Zisterne.

Bewertung: 1 BE Symmetrie, 1 BE Flächenbilanz null, 1 BE Antwort im Sachzusammenhang.

- 3 **2.1** $e^{-x} > 0$ für alle x : $k(x) = 0 \iff (x + 1)^2 = 0 \iff x = -1$ (doppelte Nullstelle)
 $x \rightarrow +\infty$: $e^{-x} \rightarrow 0$ „setzt sich durch“, $k(x) \rightarrow 0$; $x \rightarrow -\infty$: $(x + 1)^2 \rightarrow +\infty$ und $e^{-x} \rightarrow +\infty$, also $k(x) \rightarrow +\infty$

- 6 **2.2** $k'(x) = 2(x + 1) \cdot e^{-x} + (x + 1)^2 \cdot (-e^{-x}) = (x + 1)(1 - x) \cdot e^{-x} = (1 - x^2) \cdot e^{-x}$
 $k'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$ oder $x = 1$

Vorzeichen von k' : $-$ für $x < -1$, $+$ für $-1 < x < 1$, $-$ für $x > 1$

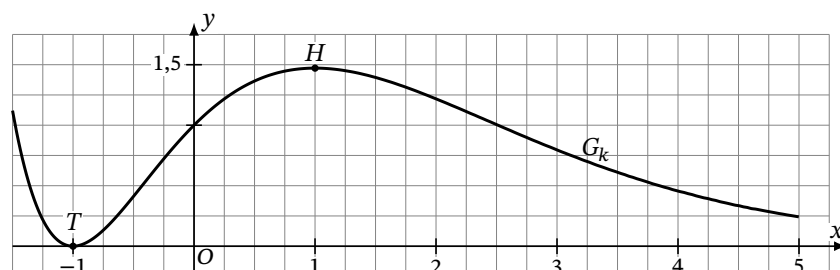
$\Rightarrow$ Tiefpunkt $T(-1 | 0)$, Hochpunkt $H(1 | 4e^{-1}) \approx H(1 | 1,47)$

- 3 **2.3** $k(x) \geq 0$ für alle x , da $(x + 1)^2 \geq 0$ und $e^{-x} > 0$; der Wert 0 wird im Tiefpunkt angenommen.

Für $x \rightarrow -\infty$ wachsen die Funktionswerte über alle Grenzen; da k stetig ist, gilt $W_k = [0; \infty[$.

- 4 **2.4**

x	-1,5	-0,5	0	2	3	4	5
$k(x)$	1,12	0,41	1	1,22	0,80	0,46	0,24

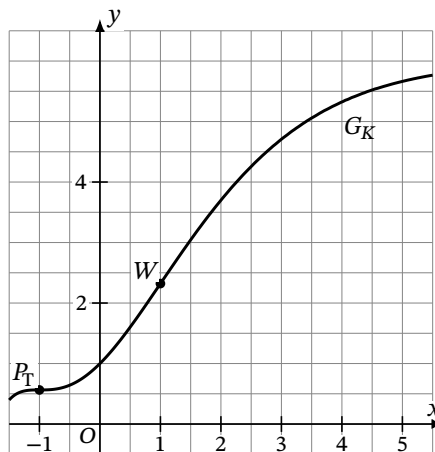


Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A I - (Fortsetzung)

- 3 2.5 Wegen $K' = k \geq 0$ ist K monoton steigend. An der Stelle $x = -1$ ist $k(-1) = 0$ ohne Vorzeichenwechsel: G_K hat dort einen Terrassenpunkt. An der Stelle $x = 1$ hat k ein Maximum: G_K hat dort einen Wendepunkt (größte Steigung). Für $x \rightarrow \infty$ geht $k(x) \rightarrow 0$: G_K verläuft zunehmend flacher.



Bewertung: 1 BE Monotonie, 1 BE Terrassenpunkt bei -1 , 1 BE Wendepunkt bei 1 ; jede Verschiebung in y -Richtung ist richtig.

43

BE	- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A II -	
3	1.1	$A(2) = 9 \Rightarrow 4e^{2k} = 9 \Rightarrow e^{2k} = 2,25 \Rightarrow k = \frac{1}{2} \ln(2,25) \approx 0,4$
4	1.2	Gerade durch $(0 4)$ und $(2 9)$: Steigung $\frac{9-4}{2} = 2,5$, $L(t) = 4 + 2,5t$ $L(4) = 14$; $A(4) = 4e^{1,6} \approx 19,8$ Abweichung vom Messwert 19: linear 5, exponentiell 0,8 – das Modell A beschreibt den Messwert deutlich besser.
3	1.3	$4e^{0,4t} = 150 \Rightarrow e^{0,4t} = 37,5 \Rightarrow t = \frac{\ln(37,5)}{0,4} \approx 9,1$ Nach etwa 9,1 Wochen wäre der Teich vollständig bedeckt.
3	1.4	$\dot{A}(t) = 1,6 \cdot e^{0,4t}$; $\dot{A}(5) = 1,6e^2 \approx 11,8$ Nach fünf Wochen nimmt die bedeckte Fläche momentan um etwa $11,8 \text{ m}^2$ pro Woche zu.
3	1.5	Neues Modell: $8e^{0,4t} = 4e^{0,4t + \ln(2)}$; die bedeckte Fläche ist immer schon so groß wie im alten Modell $\frac{\ln(2)}{0,4}$ Wochen später. Zeitgewinn: $\frac{\ln(2)}{0,4} \approx 1,7$ Wochen (oder: $8e^{0,4t} = 150 \Rightarrow t \approx 7,3$; $9,1 - 7,3$) Bewertung: jeder schlüssige Weg erhält volle BE (Verschiebung, neue Gleichung oder Verdopplungszeit).
2	1.6	Nach dem Modell wächst die bedeckte Fläche unbegrenzt; der Teich hat aber nur 150 m^2. Je mehr Fläche bedeckt ist, desto weniger Platz (und Nährstoffe) bleibt, das Wachstum verlangsamt sich. Das Modell ist nur für die Anfangsphase geeignet.
3	2.1	Boden: Länge $48 - 2x$, Breite $30 - 2x$; Höhe x: $V(x) = x(48 - 2x)(30 - 2x) = x(1440 - 156x + 4x^2) = 4x^3 - 156x^2 + 1440x$ Sinnvoll: $x > 0$ und $30 - 2x > 0$, also $D_V =]0; 15[$
5	2.2	$V'(x) = 12x^2 - 312x + 1440 = 12(x^2 - 26x + 120) = 12(x - 6)(x - 20)$ $V'(x) = 0 \Rightarrow x = 6$ ($x = 20 \notin D_V$); V' wechselt bei $x = 6$ das Vorzeichen von $+$ nach $-$: Maximum (an den Rändern geht V gegen 0) $V(6) = 6 \cdot 36 \cdot 18 = 3888$: Die Schale ist 36 cm lang, 18 cm breit, 6 cm hoch und fasst 3888 cm^3 (etwa 3,9 Liter).
4	2.3	Höhe höchstens 5 cm: $0 < x \leq 5$ Für $0 < x < 6$ ist $V'(x) > 0$, V ist also auf $]0; 5]$ streng monoton steigend; das größte Volumen ergibt sich am Rand $x = 5$: $V(5) = 5 \cdot 38 \cdot 20 = 3800$, also 3800 cm^3. Bewertung: 1 BE nur bei begründeter Monotonie (nicht nur Einsetzen von $x = 5$).
2	3.1	$b(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = \pm 8$: Spannweite 16 m; $b(0) = 4$: größte Höhe 4 m
2	3.2	$b'(x) = -\frac{1}{8}x$; $b'(8) = -1$: $\tan \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A II - (Fortsetzung)

- 3 **3.3** Wegen der Symmetrie zur y-Achse gilt für den Flächeninhalt:

$$A = 2 \int_0^8 \left(-\frac{1}{16}x^2 + 4 \right) dx = 2 \left[-\frac{1}{48}x^3 + 4x \right]_0^8 = 2 \cdot \left(-\frac{512}{48} + 32 \right) = \frac{128}{3} \approx 42,7$$

Der Flächeninhalt beträgt etwa 42,7 m².

- 3 **3.4** $b(x) \geq 3 \iff -\frac{1}{16}x^2 \geq -1 \iff x^2 \leq 16 \iff -4 \leq x \leq 4$

Der Bogen ist auf einer Breite von 8 m mindestens 3 m hoch.

- 3 **3.5** Halbe Höhe: $b(x) = 2 \Rightarrow x^2 = 32 \Rightarrow x = \pm 4\sqrt{2}$; Breite $8\sqrt{2} \approx 11,3$ (in m)

Die Schätzung trifft nicht zu: In halber Höhe ist der Bogen noch etwa 11,3 m breit, nicht 8 m. Der Bogen wird zum Scheitel hin immer schneller schmaler (quadratischer, nicht linearer Zusammenhang).

43

BE	- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - S I -	
2	1.1	$\Omega = \{ZZZ; ZZN; ZNZ; NZZ; ZNN; NZN; NNZ; NNN\}; \Omega = 8$
2	1.2	$0,8^3$: alle drei Pakete werden zugestellt; $3 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2$: genau zwei werden zugestellt. Ereignis: „Mindestens zwei der drei Pakete werden beim ersten Versuch zugestellt.“
3	1.3	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$: „Weder das erste noch das dritte Paket wird beim ersten Versuch zugestellt.“ $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04$
3	2.1	X ist binomialverteilt mit $n = 20, p = 0,2$. $P(E_1) = P(X = 4) = B(20; 0,2; 4) = 0,21820$ $P(E_2) = P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - 0,80421 = 0,19579$
2	2.2	$E(X) = n \cdot p = 20 \cdot 0,2 = 4$ zweite Zustellversuche; zu erwartende Kosten: $4 \cdot 3 \text{ €} = 12 \text{ €}$
4	3.1	Testgröße X : Anzahl der nicht beim ersten Versuch zugestellten Pakete unter 100; $X \sim B(100; p)$ $H_0: p \geq 0,2; \quad H_1: p < 0,2; \quad \text{Ablehnungsbereich } \bar{A} = \{0; 1; \dots; k\}$ $P_{0,2}(X \leq k) \leq 0,05$: Tafelwerk $P(X \leq 13) = 0,04691, P(X \leq 14) = 0,08044 \Rightarrow k = 13$ Entscheidungsregel: Können höchstens 13 der 100 Pakete nicht beim ersten Versuch zugestellt werden, wird H_0 abgelehnt und die Vermutung des Paketdienstes als gestützt angesehen; sonst nicht.
2	3.2	Fehler 2. Art: H_0 wird beibehalten, obwohl $p = 0,1$ gilt: $P_{0,1}(X \geq 14) = 1 - P_{0,1}(X \leq 13) = 1 - 0,87612 = 0,12388$
2	4.1	$12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95040$
3	4.2	Günstig: alle fünf Pakete in den Fächern 2 bis 12: $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 55440$ $P = \frac{55440}{95040} = \frac{7}{12} \approx 0,583$
23		

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - S II -

- 4 **1.1** Wegen der Unabhängigkeit gilt z. B. $P(A \cap R) = 0,43 \cdot 0,85 = 0,3655$:

	R	$\bar{R}$	Σ
A	0,3655	0,0645	0,43
$\bar{A}$	0,4845	0,0855	0,57
Σ	0,85	0,15	1

- 2 **1.2** $P_R(A) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{P(A) \cdot P(R)}{P(R)} = P(A) = 0,43$

Weil Blutgruppe und Rhesusfaktor unabhängig sind, ist der Anteil der Blutgruppe A in jeder Rhesus-Gruppe gleich groß.

- 4 **2** 50 Spender, jeweils Treffer „Rhesus-negativ“ mit $p = 0,15$; bei einer großen Kartei ist die Auswahl annähernd unabhängig und p konstant: $X \sim B(50; 0,15)$
 $\mu = 50 \cdot 0,15 = 7,5$; $\sigma = \sqrt{50 \cdot 0,15 \cdot 0,85} \approx 2,52$; $[\mu - \sigma; \mu + \sigma] \approx [4,98; 10,02]$
 $P(5 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 4) = 0,88008 - 0,11211 \approx 0,7680$

- 5 **3** $Y = 1$: der erste Spender ist Rhesus-negativ; $Y = 2$: erst der zweite; $Y = 3$: die ersten beiden sind Rhesus-positiv (der dritte Anruf erfolgt in jedem Fall).

y	1	2	3
$P(Y = y)$	0,15	$0,85 \cdot 0,15 = 0,1275$	$0,85^2 = 0,7225$

$$E(Y) = 1 \cdot 0,15 + 2 \cdot 0,1275 + 3 \cdot 0,7225 = 2,5725$$

Bei vielen solchen Notfällen sind im Mittel etwa 2,6 Anrufe nötig.

- 4 **4.1** $P(T) = 0,15 \cdot 0,98 + 0,85 \cdot 0,01 = 0,147 + 0,0085 = 0,1555$
 $P_T(\bar{R}) = \frac{0,147}{0,1555} \approx 0,945$

- 4 **4.2** Die Aussage trifft nicht zu: 98 % ist $P_{\bar{R}}(T)$ (Anteil der „negativ“-Ergebnisse unter den Rhesus-negativen Proben), gefragt ist aber $P_T(\bar{R}) \approx 94,5\%$ – Ereignis und Bedingung wurden vertauscht.

Ursache: Weil nur 15 % der Spender Rhesus-negativ sind, fallen die wenigen Fehlanzeigen bei den vielen Rhesus-positiven Spendern ins Gewicht. Etwa jede 18. „negativ“-Anzeige ist falsch; da Rhesus-positives Blut für Rhesus-negative Empfänger gefährlich sein kann, sollte das Ergebnis durch einen Labortest bestätigt werden.

Bewertung: 1 BE Vergleich der beiden bedingten Wahrscheinlichkeiten, 1 BE Benennung des Denkfehlers, 1 BE Ursache (kleiner Anteil), 1 BE begründetes Urteil im Sachzusammenhang.

23