

Musterprüfung Nr. 001 zum Fachabitur
zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Teil 1: ohne Hilfsmittel

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben sämtliche Aufgaben zu bearbeiten.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

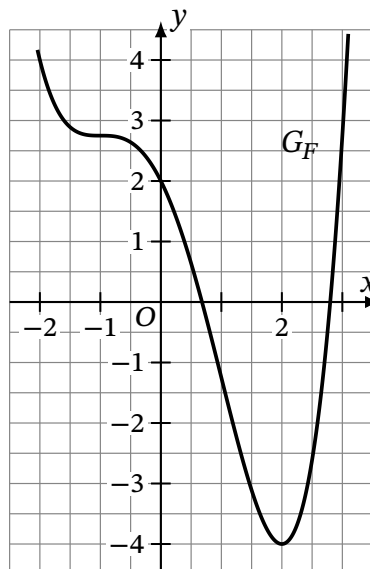
BE

1.0 Gegeben ist die Funktion

$$f: x \mapsto x^3 - 6x^2 + 9x, \quad D_f = \mathbb{R}$$

Der Graph von f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

- 3 1.1 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f samt ihrer Vielfachheit und geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \rightarrow -\infty$ und für $x \rightarrow +\infty$ an.
- 4 1.2 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f .
- 3 1.3 Ermitteln Sie die Stelle, an der G_f parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = -3x$ verläuft, und begründen Sie, dass es genau eine solche Stelle gibt.
- 5 2 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_F einer Stammfunktion F einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f .



Entscheiden Sie jeweils anhand der Abbildung, ob folgende Aussagen wahr (w) oder falsch (f) sind bzw. ob dies mit den gegebenen Informationen nicht entscheidbar (n. e.) ist. Kreuzen Sie entsprechend an.

Hinweis: Jedes richtig gesetzte Kreuz ergibt +1 BE, jedes falsch gesetzte - 0,5 BE und jedes nicht gesetzte 0 BE. Im ungünstigsten Fall wird die Aufgabe mit 0 BE bewertet.

Aussage	w	f	n. e.
$f(2) = 0$			
Die Funktionswerte von f wechseln an der Stelle $x = -1$ ihr Vorzeichen.			
Der Graph von f besitzt im Intervall $] -1; 2[$ einen Tiefpunkt.			
$\int_{-2}^0 f(x) dx > 0$			
Der Graph G_F schneidet die x -Achse insgesamt genau zweimal.			

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

3.0 Gegeben ist die Funktion

$$g: x \mapsto 4 - 2e^{-x}, \quad D_g = \mathbb{R}$$

Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

- 2 **3.1** Geben Sie die Gleichung der waagrechten Asymptote von G_g sowie die Koordinaten des Schnittpunkts von G_g mit der y -Achse an.
- 2 **3.2** Berechnen Sie die exakte Nullstelle der Funktion g .
- 3 **3.3** Bestimmen Sie einen Term derjenigen Stammfunktion G von g , deren Graph durch den Koordinatenursprung verläuft.

22

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

- 1.0** Eine Wetter-App kündigt für jeden Tag an, ob es regnen wird oder nicht. Die Auswertung eines Jahres für eine Stadt ergab: An 30 % aller Tage regnete es (R). An 80 % der Regentage hatte die App Regen angekündigt (A). An 10 % der Tage ohne Regen hatte die App fälschlicherweise Regen angekündigt.
- 3 1.1** Erstellen Sie eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel für die Ereignisse R und A .
- 3 1.2** Ein Nutzer folgert: „Die App sagt 80 % der Regentage richtig voraus. Wenn sie Regen ankündigt, regnet es also mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 %.“ Begründen Sie, ob diese Folgerung zutrifft.
- 2 2** Entscheiden Sie jeweils, ob es sich um eine Bernoulli-Kette handelt. Geben Sie gegebenenfalls die Länge n und die Trefferwahrscheinlichkeit p an.
- a) Ein Laplace-Würfel wird zehnmal geworfen. Treffer: Die Augenzahl ist größer als 4.
- b) Aus einer Urne mit drei roten und sechs blauen Kugeln werden nacheinander drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Treffer: Die gezogene Kugel ist rot.
- 3.0** Bei einem Spiel auf dem Schulfest werden zwei Laplace-Würfel gleichzeitig geworfen. Zeigen beide Würfel dieselbe Augenzahl (Pasch), werden 4 € ausbezahlt; beträgt die Augensumme 7, werden 2 € ausbezahlt. In allen anderen Fällen gibt es keine Auszahlung.
- 2 3.1** Bestimmen Sie den Einsatz, bei dem das Spiel fair ist.
- 2 3.2** Die Auszahlung für einen Pasch wird auf 5 € erhöht, der Einsatz bleibt wie in 3.1. Entscheiden Sie ohne Rechnung, ob das Spiel dann für den Spieler günstig oder ungünstig ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

12

Musterprüfung Nr. 001 zum Fachabitur
zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Teil 2: mit Hilfsmitteln

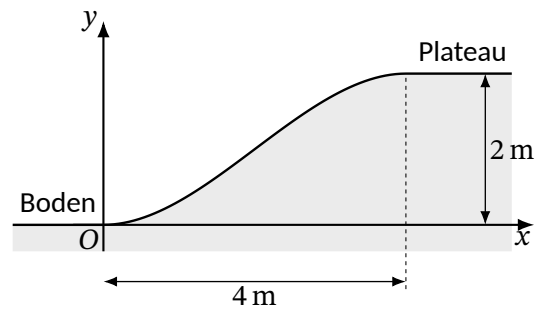
Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen Hilfsmittel verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen *Analysis* und *Stochastik* zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

- 1.0** In einem Skatepark soll eine Rampe den Boden mit einem 2 m höher gelegenen Plateau verbinden (siehe nicht maßstäbliche Skizze). In waagrechtlicher Richtung ist die Rampe 4 m lang. Das Profil der Rampe wird im Koordinatensystem der Skizze durch den Graphen G_f der Funktion f mit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, und der Definitionsmenge $D_f = [0; 4]$ beschrieben. Dabei geben x und $f(x)$ Längen in Metern an.



Damit Skater ohne Ruck auf die Rampe und auf das Plateau gelangen, gehen Boden und Plateau knickfrei in die Rampe über. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

- 1.1** Bestimmen Sie die Werte der Parameter a , b , c und d . Begründen Sie dabei, warum für einen knickfreien Übergang $f'(0) = 0$ und $f'(4) = 0$ gelten muss.
[Mögliches Ergebnis: $f(x) = -\frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{8}x^2$]
- 1.2** Ermitteln Sie die Stelle, an der die Rampe am steilsten ist, und geben Sie die Steigung an dieser Stelle in Prozent an.
- 1.3** Ein Skater behauptet: „Nach einem Meter ist die Rampe genau halb so steil wie an ihrer steilsten Stelle, weil die Steigung bis zur Mitte gleichmäßig zunimmt.“ Untersuchen Sie, ob diese Behauptung zutrifft.
- 1.4** Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab für beide Achsen: $1 \text{ m} \hat{=} 2 \text{ cm}$
- 1.5** Die beiden Seitenflächen der Rampe – jeweils das Flächenstück zwischen G_f , der x -Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = 4$ – sollen gestrichen werden. Ein Liter Farbe reicht für 5 m^2 . Berechnen Sie, wie viele Liter Farbe mindestens benötigt werden.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- 2.0** Nach einem Gewitter steigt der Abfluss eines Baches an. Er lässt sich modellhaft durch die Funktion Q mit

$$Q(t) = 2 + 3t \cdot e^{-0,5t}, \quad t \in \mathbb{R}_0^+$$

beschreiben. Dabei ist t die Zeit in Stunden seit Beginn des Gewitters und $Q(t)$ der Abfluss in $\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ (Kubikmeter Wasser pro Sekunde). Ab einem Abfluss von $4 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ gibt die Gemeinde eine Hochwasserwarnung heraus.

Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.

- 3 2.1** Berechnen Sie $Q(0)$ und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von Q für $t \rightarrow \infty$. Interpretieren Sie beide Ergebnisse im Sachzusammenhang.
- 7 2.2** Ermitteln Sie rechnerisch den größten Abfluss des Baches nach diesem Modell.
[Mögliches Teilergebnis: $\dot{Q}(t) = (3 - 1,5t) \cdot e^{-0,5t}$]
- 5 2.3** Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen von Q für $0 \leq t \leq 12$ in ein Koordinatensystem.
Maßstab: $1 \text{ h} \hat{=} 1 \text{ cm}$; $1 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \hat{=} 2 \text{ cm}$
Entnehmen Sie Ihrer Zeichnung, wie lange die Hochwasserwarnung ungefähr besteht.
- 4 2.4** Der Graph von Q hat an der Stelle $t = 4$ einen Wendepunkt (Nachweis nicht erforderlich).
Berechnen Sie $\dot{Q}(4)$ und interpretieren Sie den Wert im Sachzusammenhang.
- 3 2.5** Ein Anwohner meint: „Nach dem Modell führt der Bach zwölf Stunden nach Beginn des Gewitters wieder genau so viel Wasser wie vorher.“
Erläutern Sie, inwiefern diese Aussage zutrifft, und nennen Sie eine Grenze des Modells.

43

BE

- 1.0** In Klassenzimmern zeigen CO₂-Ampeln die Kohlenstoffdioxid-Konzentration der Raumluft in ppm (Anzahl CO₂-Teilchen pro einer Million Luftteilchen) an. Ab 1000 ppm sollte gelüftet werden; die Außenluft hat eine Konzentration von etwa 400 ppm. Am Ende einer Unterrichtsstunde zeigt die Ampel 2000 ppm. Die Klasse bleibt im Raum, die Fenster werden geöffnet. Die Ampel speichert folgende Messwerte:

Zeit seit dem Öffnen der Fenster in min	0	5	30
CO ₂ -Konzentration in ppm	2000	1000	520

Die Konzentration wird modellhaft durch die Funktion C mit

$$C(t) = 400 + a \cdot e^{-k \cdot t}, \quad t \in \mathbb{R}_0^+$$

und $a, k \in \mathbb{R}^+$ beschrieben. Dabei ist t die Zeit in Minuten seit dem Öffnen der Fenster und $C(t)$ die Konzentration in ppm.

Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

- 1.1** Bestimmen Sie mithilfe der Messwerte für $t = 0$ und $t = 5$ die Werte der Parameter a und k . Runden Sie k auf zwei Nachkommastellen.

Im Folgenden gilt:

$$C(t) = 400 + 1600 \cdot e^{-0,2 \cdot t}$$

- 1.2** Berechnen Sie, nach welcher Zeit die Konzentration nach diesem Modell auf 600 ppm gesunken ist. Runden Sie auf eine Nachkommastelle.
- 1.3** Berechnen Sie die momentane Änderungsrate der Konzentration fünf Minuten nach dem Öffnen der Fenster und deuten Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.
- 1.4** Wird zusätzlich die Tür geöffnet (Querlüften), verdoppelt sich der Wert von k ; alle anderen Werte bleiben gleich. Entscheiden Sie ohne Rechnung, wie sich der Graph von C dadurch verändert, und geben Sie anschließend an, nach welcher Zeit dann 600 ppm erreicht werden.
- 1.5** Untersuchen Sie mithilfe des Messwerts nach 30 Minuten, wie gut das Modell die Messung beschreibt, und erläutern Sie eine mögliche Ursache für die Abweichung.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

2.0 Gegeben ist die Funktion

$$h : x \mapsto (x^2 - 3) \cdot e^{-x}, \quad D_h = \mathbb{R}$$

Der Graph von h in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_h bezeichnet.

3 2.1 Ermitteln Sie die Nullstellen von h sowie das Verhalten der Funktionswerte von h für $x \rightarrow -\infty$ und für $x \rightarrow +\infty$.

6 2.2 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_h .
[Mögliches Teilergebnis: $h'(x) = -(x^2 - 2x - 3) \cdot e^{-x}$]

4 2.3 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_h für $-1,5 \leq x \leq 6$ in ein Koordinatensystem.
Maßstab für beide Achsen: 1 LE $\hat{=}$ 1 cm

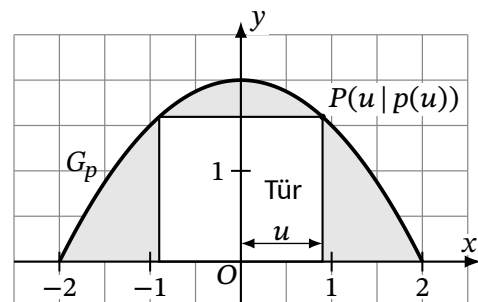
2 2.4 Zeigen Sie, dass die Funktion H mit

$$H(x) = -(x^2 + 2x - 1) \cdot e^{-x}, \quad D_H = \mathbb{R}$$

eine Stammfunktion von h ist.

3.0 Für ein Gemüsebeet wird ein Folientunnel gebaut. Seine Stirnseite wird im Koordinatensystem der Skizze vom Graphen G_p der Funktion p mit $p(x) = 2 - \frac{1}{2}x^2$ und $D_p = [-2; 2]$ sowie von der x -Achse begrenzt. Dabei entspricht eine Längeneinheit 1 m.

In die Stirnseite wird eine rechteckige Tür eingesetzt, die symmetrisch zur y -Achse auf dem Boden steht und deren obere Ecken auf dem Bogen liegen. Die halbe Breite der Tür wird mit u bezeichnet.



3 3.1 Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt der Tür gilt: $A(u) = 4u - u^3$. Geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge für A an.

5 3.2 Ermitteln Sie die Breite und die Höhe der Tür mit dem größtmöglichen Flächeninhalt und geben Sie diesen Flächeninhalt an. Runden Sie auf zwei Nachkommastellen.

4 3.3 Damit man mit einer Schubkarre hindurchfahren kann, soll die Tür mindestens 1,50 m hoch sein.
Ermitteln Sie unter dieser Bedingung die Breite der Tür mit dem größtmöglichen Flächeninhalt.

43

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 In einer Stadt können Räder eines Bike-Sharing-Anbieters per App ausgeliehen werden. 40 % der Ausleihen betreffen ein E-Bike (E), die übrigen ein Citybike. Von den E-Bike-Nutzern besitzen 60 % ein Monatsabo (M), von den Citybike-Nutzern 30 %. Unabhängig von Rad und Abo tragen 25 % aller Nutzer einen Helm (H). Eine zufällig ausgewählte Ausleihe wird hinsichtlich Rad, Abo und Helm betrachtet und als Zufallsexperiment aufgefasst.

5 **1.1** Bestimmen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse.

[Teilergebnis: $P(\{(E; M; H)\}) = 0,06$]

3 **1.2** Gegeben ist das Ereignis

E_1 : „Der Nutzer besitzt ein Monatsabo oder trägt einen Helm.“

Geben Sie E_1 in aufzählender Mengenschreibweise an und berechnen Sie $P(E_1)$ mithilfe des Gegenereignisses.

3 **1.3** Berechnen Sie den Anteil der E-Bike-Ausleihen unter allen Ausleihen mit Monatsabo und interpretieren Sie den Wert im Vergleich zu 40 %.

2.0 An einer Station stehen zwölf Räder. Jedes Rad ist unabhängig von den anderen mit einer Wahrscheinlichkeit von 15 % defekt.

3 **2.1** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

E_2 : „Genau zwei Räder sind defekt.“

E_3 : „Mindestens zehn Räder sind fahrbereit.“

3 **2.2** Ein Servicetechniker prüft nacheinander zufällig ausgewählte Räder des Anbieters; auch für diese gilt die Defektwahrscheinlichkeit von 15 %. Ermitteln Sie, wie viele Räder er mindestens prüfen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens ein defektes Rad zu finden.

3.0 Nach einer Preissenkung für E-Bikes vermutet der Anbieter, dass der Anteil der E-Bike-Ausleihen über 40 % gestiegen ist (Gegenhypothese). Er möchte seine Werbung nur dann umstellen, wenn ein Test diese Vermutung auf einem Signifikanzniveau von 5 % stützt. Dazu werden 100 zufällig ausgewählte Ausleihen untersucht.

4 **3.1** Entwickeln Sie einen geeigneten Hypothesentest und geben Sie an, welche Entscheidung der Test nahelegt, wenn 47 der 100 Ausleihen E-Bikes betreffen.

2 **3.2** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art, wenn der Anteil der E-Bike-Ausleihen tatsächlich 50 % beträgt.

23

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Ein Unternehmen sortiert eingehende E-Mails mit einem Spamfilter. 20 % aller eingehenden E-Mails sind Spam (S). Der Filter markiert 95 % der Spam-Mails als Spam (M), aber auch 4 % der erwünschten E-Mails.

4 **1.1** Erstellen Sie eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel für die Ereignisse S und M .

4 **1.2** Der Hersteller wirbt: „Unser Filter erkennt 95 % aller Spam-Mails. Eine markierte E-Mail ist also mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % Spam.“
Untersuchen Sie, ob diese Folgerung zutrifft, und erläutern Sie den Denkfehler.

3 **1.3** Untersuchen Sie, ob die Ereignisse S und M stochastisch unabhängig sind, und deuten Sie das Ergebnis im Hinblick auf die Qualität des Filters.

5 **2** Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Spam-Mails unter 50 zufällig ausgewählten eingehenden E-Mails an.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert von X innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegt. Begründen Sie dabei, dass X als binomialverteilt angesehen werden kann.

3.0 Für jede eingehende E-Mail entsteht für die Mitarbeiter ein Zeitaufwand T (in Sekunden): Eine nicht markierte Spam-Mail muss von Hand gelöscht werden (60 s), eine fälschlich markierte erwünschte E-Mail muss im Spam-Ordner gesucht werden (120 s). In allen anderen Fällen entsteht kein Zeitaufwand.

4 **3.1** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von T sowie den Erwartungswert von T . Interpretieren Sie den Erwartungswert, wenn täglich 200 E-Mails eingehen.

3 **3.2** Ein anderer Filter B markiert 99 % der Spam-Mails, aber 10 % der erwünschten E-Mails als Spam.
Entscheiden Sie mithilfe des Erwartungswerts des Zeitaufwands, welcher der beiden Filter für das Unternehmen günstiger ist.

23